В.С. Замиралов

Основные понятия теории групп и их представлений и некоторые приложения к физике частиц

В изложенных избранных главах по теории групп и их приложениям к физике частиц рассмотрены вопросы классификации частиц по представлениям унитарных групп, подробно разобрана кварковая модель. Подробно изложено построение массовых формул для элементарных частиц. Приведены примеры вычислений магнитных моментов и аксиально-векторных констант связи в модели унитарной симметрии и кварковой модели. Построены выражения для электромагнитного и слабого токов в обеих моделей, подробно изложена проблема нейтральных токов. Построен электрослабый ток модели Салама-Вайнберга-Глэшоу. Введено понятие цвета и даны простые примеры с ним. Объясняется введение векторных бозонов как калибровочных полей. Автор старался построить лекции таким образом. чтобы читатель мог, по их прочтении, самостоятельно проводить вычисления многих характеристик элементарных частиц.

- **Основные понятия теории групп и их представлений**
  - **Введение**
  - **Группы и алгебры. Основные понятия**
  - **Представления групп и алгебр Ли**
  - **Унитарная унимодулярная группа SU(2)**
  - **SU(2) как группа спина**
  - **Группа изоспина SU(2)**
  - **Группа унитарной симметрии SU(3)**
- **Модель унитарной симметрии и модель кварков**
  - **Восьмеричный путь. Массовые формулы в SU(3)**
    - **Массовые формулы для октета псевдоскалярных мезонов**
    - **Массовые формулы для октета барионов $J^P = 1/2^+$**
    - **Нонет векторных мезонов и массовые формулы**
    - **Декуплет барионных резонансов с $J^P = 1/2^+$ и его массовые формулы**
  - **Прачастицы и гипотеза кварков**
  - **Кварковая модель. Мезоны в кварковой модели**
  - **Шарм и его появление в физике частиц. Бьюти.**
  - **Truth или top**

- Барионы в кварковой модели
- **Токи в моделях унитарной симметрии и кварков**
  - Электромагнитный ток в унитарной симметрии и в кварковой модели
    - Радиационные распады векторных мезонов
    - Лептонные распады векторных мезонов
  - Фотон как калибровочное поле
  - Ро-мезон как калибровочное поле
- **Векторный и аксиально-векторный слабые токи в унитарной симметрии и кварковой модели**
  - Общие сведения о слабом взаимодействии
  - Слабые токи в модели унитарной симметрии
  - Слабые токи в кварковой модели
- **Основы модели Вайнберга-Салама-Глэшоу**
  - Нейтральные слабые токи
  - Модель ГИМ
  - Построение модели Салама-Вайнберга
  - 6-кварковая модель и матрица СКМ
  - Бозоны W и Y как калибровочные поля
  - О механизме Хиггса
- **Цвет и глюоны**
  - Цвет и его появление в физике частиц
  - Глюон как калибровочное поле
  - Простые примеры проверки гипотезы о цветных кварках

Литература

1. Нгуен Ван Хьеу, лекции по теории унитарной симметрии элементарных частиц.- Москва: Атомиздат, 1967.
2. Газиорович, Физика элементарных частиц.- Москва: Наука, 1969.
3. А.А.Славнов, Л.Д.Фаддеев, Введению в квантовую теорию калибровочных полей.- Москва: Наука, 1978.
4. Дж.Тейлор, Калибровочные теории слабых взаимодействий.- Москва: Мир, 1978.
5. С.М.Биленький, Лекции по физике нейтринных и лептон-нуклонных процессов.- Москва: Энергоиздат, 1981.
6. М.Б.Волошин, К.А.Тер-Мартиросян, Теория калибровочных взаимодействий элементарных частиц.-Москва:Энергоатомиздат, 1984.
7. Л.Б.Окунь, Физика элементарных частиц.- Москва: Наука, 1984.
8. К.Хуанг. Кварки, лептоны и калибровочные поля.- Москва: Мир, 1985.
9. Ф.Хелзен, А.Мартин, Кварки и лептоны.- Москва: Мир, 1987.

10. Ю.Комминс, Ф.Буксбаум, Слабые взаимодействия лептонов и кварков.- Москва: Энергоатомиздат, 1987.
11. Т.-П.Ченг, Л.-Ф.Ли, Калибровочные теории в физике элементарных частиц.- Москва: Мир, 1987.

Introduction to group theory and its representations and some applications to particle physics

Последние изменения 27.02.09

1.1 Введение

Вечно наше стремление к постижению истины.
Ф. Бэкон

В предлагаемых читателю избранных главах по теории групп и их приложениям к физике элементарных частиц будут рассмотрены вопросы классификации частиц по представлениям унитарных групп, вычисление отдельных характеристик адронов, подробно разобрана кварковая модель. Первые главы посвящены краткому изложению необходимых сведений по теории групп, алгебр и их представлений, при этом подробнее дан материал относительно унитарных групп SU(2) и SU(3), играющих основную роль в современной физике элементарных частиц. Действительно, группа SU(2) является группой спиновых и изотопических преобразований, а также составляет основу группы калибровочных преобразований электрослабых взаимодействий SU(2) x U(1) в модели Салама-Вайнберга-Глэшоу. Группа SU(3) в свою очередь, является основой модели унитарной симметрии и кварковой модели с тремя ароматами, а также группой цвета, т.е., на ней покоится все здание квантовой хромодинамики. С тем, чтобы познакомить читателя на простых примерах с теоретико-групповым формализмом, применяемым в физике элементарных частиц, будет подробно изложено построение массовых формул для элементарных частиц. Другими важными примерами конкретного применения формализма теории групп и их представлений послужат примеры вычислений таких важнейших характеристик элементарных частиц как магнитные моменты и аксиально-векторные константы связи в модели унитарной симметрии и кварковой модели. Будут построены выражения для электромагнитного и слабого токов адронов и кварков в обеих моделях. Особое внимание будет уделено проблеме нейтральных токов. Подробно приведено построение электрослабого тока кварков, что должно составить практическое введение к модели Салама-Вайнберга-Глэшоу. Введено понятие цвета и даны простые примеры, подтверждающие гипотезу цвета. Объясняется введение векторных бозонов как калибровочных полей.

Автор старался построить лекции таким образом. чтобы читатель мог, по их прочтении, самостоятельно проводить вычисления многих характеристик элементарных частиц.

Содержание Продолжение

1.2 Группы и алгебры. Основные понятия

Определение группы

Пусть задано множество элементов G $g_1, g_2, \dots, g_n$, обладающих следующими свойствами:

1. Определен закон умножения элементов $g_i g_j = g_k$, причем если $g_i, g_j \in G$, то $g_i g_j = g_k \in G$,
   i, j, l = 1, 2, ..., n.
2. Выполняется закон ассоциативности $g_i (g_j g_k) = (g_i g_j) g_k$.
3. Существует единичный элемент e, $eg_i = g_i$, i = 1, 2, ... , n.
4. Существует обратный элемент g_i^{-1}, $g_i^{-1} g_i = e$, i = 1, 2, ... , n.

Тогда на множестве G задана группа элементов $g_1, g_2, \dots, g_n$

В качестве простого примера рассмотрим вращение на плоскости. Зададим множество Ф всех поворотов на углы φ

1. Закон умножения в данном случае - это сложение углов: $\varphi_1 + \varphi^2 = \varphi^3 \in \Phi$.
2. Закон ассоциативности запишется как $(\varphi_1 + \varphi^2) + \varphi^3 = \varphi_1 + (\varphi^2 + \varphi^3)$.
3. Единичный элемент в данном случае - поворот на угол 0 $(+2\pi n)$.
4. Обратный элемент в данном случае -поворот на угол $-\varphi$ $(+2\pi n)$.

Итак, вращения вокруг оси, перпендикулярной выбранной плоскости, образуют группу.

Рассмотрим поворот координатных осей x, y, z, задающих декартову систему координат в 3-мерном пространстве, на угол θ_3 в плоскости x y вокруг оси z:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_3 & \sin\theta_3 & 0 \\ -\sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_3(\theta_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (1.1)$$

Пусть ε - бесконечно малый поворот. Разложим матрицу поворота $R_3(\varepsilon)$ в ряд Тэйлора и ограничимся членами, линейными по ε:

$$R_3(\varepsilon) = R_3(0) + \frac{dR_3}{d\varepsilon}_{\varepsilon=0}\varepsilon + O(\varepsilon^2) = 1 + iA_3\varepsilon + O(\varepsilon^2), \tag{1.2}$$

где использовано, что $R_3(0)$ суть единичная матрица, и введена матрица

$$A_3 = -i\,\frac{dR_3}{d\varepsilon}_{\varepsilon=0} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

которую назовем генератором поворота вокруг 3-ей оси (оси z). Выберем $\varepsilon = \eta_3/n$, тогда поворот на угол η_3 получится n-кратным применением оператора $R_3(\varepsilon)$, и в пределе

$$R_3(\eta_3) = \lim_{n\to\infty}\left[1 + iA_3\eta_3/n\right]^n = \lim_{n\to\infty}\left[1 + iA_3\eta_3/n\right]^n = e^{iA_3\eta_3} \tag{1.4}$$

Рассмотрим повороты вокруг оси y:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & 0 & \sin\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_2(\theta_2)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

где, соответственно, введен генератор поворота вокруг оси y:

$$A_2 = -i\,\frac{dR_2}{d\varepsilon}_{\varepsilon=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

и вокруг оси x:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ 0 & -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_1(\theta_1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

где введен генератор поворота вокруг оси x:

$$A_1 = -i \frac{dR_1}{d\varepsilon}_{\varepsilon=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

Теперь в трехмерном пространстве можно уже записать поворот декартовой 3-мерной системы координат на произвольные конечные углы, например, как

$$R_1(\eta_1)R_2(\eta_2)R_3(\eta_3) = e^{iA_1\eta_1} e^{iA_2\eta_2} e^{iA_3\eta_3}. \tag{1.9}$$

Обычно, однако, вращение в 3-мерном пространстве задают несколько иначе, а именно, посредством углов Эйлера

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = e^{iA_1\alpha} e^{iA_2\beta} e^{iA_3\gamma} \tag{1.10}$$

Генераторы A_l l = 1, 2, 3, удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$A_i \cdot A_j - A_j \cdot A_i = [A_i, A_j] = i\varepsilon_{ijk}A_k, \tag{1.11}$$

где ε_{ijk} - абсолютно антисимметричный тензор 3-го ранга. Отметим,что матрицы A_l l = 1, 2, 3, антисимметричны, тогда как матрицы R_k-ортогональны, т.е. $R_i^T R_j = \delta_{ij}$, где значок T означает транспонирование. Повороты могут быть полностью заданы посредством генераторов A_l l = 1, 2, 3, другими словами, группа 3-мерных вращений (как, впрочем, и любая непрерывная группа Ли с точностью до дискретных преобразований) вполне характеризуется заданием **алгебры** , т.е. заданием генераторов A_l, l = 1, 2, 3, их линейных комбинаций и коммутационных соотношений.

Определение алгебры

L - алгебра Ли над полем вещественных чисел K, если:
(i) L -линейное пространство над K (для $x \in L$ определено умножение на числа из K),
(ii) для $x,y \in L$ определен коммутатор [x, y], также принадлежащий L, причем [x, y] обладает свойствами:
$[\alpha x, y] = \alpha[x, y]$, $[x, \alpha y] = \alpha[x, y]$ при $\alpha \in K$ и $[x_1 + x_2, y] = [x_1, y] + [x_2, y]$,

$[x, y_1 + y_2] = [x, y_1] + [x, y_2]$ для всех $x, y \in L$;

$[x, x] = 0$ для всех $x, y \in L$;
$[[x, y] z] + [[y, z] x] + [[z, x] y] = 0$ (тождество Якоби).

Содержание Продолжение

1.3 Представления групп и алгебр Ли

Прежде чем перейти к определению представления , нам понадобятся понятия изоморфизма и гомоморфизма.

Определение изоморфизма и гомоморфизма

Пусть заданы группы G и G'. Отображение f группы G в группу G' называется гомо- или изоморфизмом,

$$\textit{Если } f(g_1, g_2) = f(g_1)\, f(g_2) \quad \textit{для любых} \quad g_1, g_2 \in G.$$

Это означает, что если f отображает g_1 в g_1' и g_2 в g_2', то f также отображает $g_1 g_2$ в $g_1' g_2'$.

При этом если f(e) отображает e в единичный элемент в G', то обратное, вообще говоря, несправедливо, а именно, e' из G' отображается обратным преобразованием f^{-1} в $f^{-1}(e')$, именуемый ядром гомоморфизма.

Если ядро гомоморфизма суть e из G , то такой однозначный гомоморфизм называется изоморфизмом.

Определение представления

Пусть теперь заданы группа G **и некоторое линейное пространство** L. Представлением группы G **в** L **называется отображение** T, **которое каждому элементу** g **в группе** G **ставит в соответствие линейный оператор** T(g) **в пространстве** L **так, что выполнены следующие условия:**

(1) $T(g_1, g_2) = T(g_1)T(g_2)$ **для всех** $g_1, g_2 \in G$

(2) T(e) = 1, **где** 1 - **единичный оператор в L.**

Множество операторов T(g) гомоморфно группе G.

Линейное пространство L называется пространством представления, а операторы T(g) - операторами представления, причем они взаимно однозначно отображают L на L. Поэтому свойство (1) означает, что представление группы G в L есть гомоморфизм группы G в G^* (группу всех линейных операторов в L, взаимно однозначно отображающих L в L). Если пространство L конечномерно, то его размерность называется размерностью представления T и обозначается

n_T. В этом случае, выбрав в пространстве L базис $e_1, e_2, ..., e_n$, можно задать операторы T(g) матрицами n-го порядка

$$t(g) = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (1.12)$$

$$T(g)e_k = \sum t_{ij}(g)e_j, \qquad t(e) = 1, \qquad t(g_1, g_2) = t(g_1)\, t(g_2).$$

Матрица t(g) называется матрицей представления T. Если сама группа G состоит из матриц фиксированного порядка, то одно из простых представлений получается при T(g) = g (тождественное или присоединенное (adjoint) представление).

Такое тождественное представление уже было нами рассмотрено выше и есть совокупность ортогональных матриц 3 x 3 группы вращений O(3) в 3-мерном пространстве. А совокупность антисимметричных матриц A_i, i = 1, 2, 3 есть тождественное представление соответствующей алгебры Ли. Понятно, что построив все представления данной алгебры Ли, мы тем самым построим все представления сответствующей группы Ли (с точностью до дискретных преобразований).

Преобразованием подобия $T'(g) = A^{-1}T(g)A$ можно получить из T(g) представление T'(g) = g, эквивалентное данному, но, скажем, более удобному (например, матрицу представлений можно сделать близкой к диагональной).

Определим сумму представлений $T(g) = T_1(g) + T_2(g)$ и скажем, что представление неприводимо, если оно в такую сумму не раскладывается (для представлений групп Ли такое определение вполне корректно).

Для отыскания и классификации неприводимых представлений (НП) важное значение имеет лемма Шура.

Лемма Шура: Пусть даны два НП $t^{\alpha}(g)$ *и* $t^{\beta}(g)$ *группы G. Любая матрица B, такая что* $B\, t^{\alpha}(g) = t^{\beta}(g)\, B$ *при всех* $g \in G$ *либо равна 0 (если* $t^{\alpha}(g)$ *и* $t^{\beta}(g)$ *неэквивалентны), либо кратна единичной матрице* λI.

Следовательно, если существует $B \neq \lambda I$, коммутирующая со всеми матрицами НП T(g), то T(g) приводимо. Действительно, если T(g) приводимо и имеет вид

$$T(g) = T_1(g) + T_2(g) = \begin{pmatrix} T_1(g) & 0 \\ 0 & T_2(g) \end{pmatrix}, \tag{1.13}$$

то

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 I^1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 I^2 \end{pmatrix} \neq \lambda I \tag{1.14}$$

и $[T(g), B] = 0$.

Для группы вращений сразу видно, что, если $[A_i, B] = 0$, $i = 1, 2, 3$, то и $[R^i, B] = 0$, т.е. нам достаточно найти матрицу B, коммутирующую со всеми генераторами данного представления, а собственные значения такого матричного оператора B можно использовать для классификации неприводимых представлений группы. Это справедливо для любой группы Ли и ее алгебры.

Итак, мы хотим найти все неприводимые конечномерные представления группы 3-мерных вращений, что сводится к отысканию всех неприводимых наборов эрмитовых матриц $J_{1,2,3}$, удовлетворяющих коммутационным соотношениям

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k. \tag{1.15}$$

Существует только один инвариант, составленный из генераторов группы - $\vec{J}^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$, для которого $\left[\vec{J}^2, J_i\right] = 0$, $i = 1, 2, 3$. Следовательно, НП можно характеризовать индексом j, связанным с собственным значением оператора $\vec{J}^2$.

Чтобы пройти дальше, вернемся на момент к определению представления. Операторы T(g) действуют в линейном n - мерном пространстве L_n и могут быть реализованы матрицами n x n, где n - размерность представления. В этом линейном пространстве определены n - мерные вектора $\vec{v}$, причем любой вектор может быть выражен в виде линейной комбинации n произвольно выбранных линейно независимых векторов

$$\vec{e}_i, \quad \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i \ .$$

Другими словами, пространство L_n натянуто на n линейно независимых векторов $\vec{e}_i$, образующих базис в L_n. Например, для группы вращений O(3) произвольный 3-вектор можно

задать, как мы уже видели, с помощью базисных векторов

$$e_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

как $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ или $\vec{x} = xe_x + ye_y + ze_z$. А 3-мерное представление (тождественное или присоединенное представление в данном случае) реализуется матрицами R_i, i = 1, 2, 3. Мы сейчас представим его иначе.

Наша задача состоит в том, чтобы найти матрицы J_i некоторой размерности n в базисе из n линейно независимых векторов, причем нам известны, во-первых, коммутационные соотношения $[J_i,J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k$, во-вторых, то, что НП можно характеризовать собственным значением $\vec{J}^2$. Кроме того, можно провести преобразование подобия над матрицами (8, 6, 3), так чтобы одна из матриц, J_3, стала диагональной. Ее диагональные элементы тогда будут собственными значениями базисных векторов.

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 1+i & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1-i & 0 \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.17}$$

$$UA_2U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad U(A_1 + A_3)U^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad U(A_3 - A_1)U^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В нашем примере 3-мерного представления

$$J_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.18}$$

$$J_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i\sqrt{2} & 0 \\ i\sqrt{2} & 0 & -i\sqrt{2} \\ 0 & i\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.19}$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.20}$$

В качестве базисных векторов выберем

$$|1+1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |1-1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{1.21}$$

при этом

$$J_3|l + l> = |l + l>, \quad J_3|l\ 0> = 0|l\ 0>, \quad J_3|l - l> = -|l - l>. \tag{1.22}$$

В теории углового момента в 3-мерном пространстве эти величины образуют базис представления с полным моментом 1. Но они же могут быть отождествлены с 3-вектором в любом, в том числе гипотетическом пространстие. Например, забегая вперед, заметим, что триплет π-мезонов в изотопическом пространстве можно поместить в эти же базисные векторы:

$$\pi^+,\ \pi^-,\ \pi^0 \longrightarrow |\pi^{\pm}> = |l \pm l>, \qquad |\pi^0> = |l\ 0>. \tag{1.23}$$

Подробно выпишем матрицы для J = 2, т.е., для представления размерности n = 2J + 1 = 5:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{3/2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3/2} & 0 & \sqrt{3/2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3/2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.24}$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & -i\sqrt{3/2} & 0 & 0 \\ 0 & i\sqrt{3/2} & 0 & -i\sqrt{3/2} & 0 \\ 0 & 0 & i\sqrt{3/2} & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \qquad (1.25)$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \qquad (1.26)$$

Как и следует ожидать, эти матрицы удовлетворяют коммутационным соотношениям $[J_i,J_j] = i\,\varepsilon_{ijk}J_k$, i, j, k = 1, 2, 3, т.е., реализуют представление размерности 5 алгебры Ли, соответствующей группе вращений O(3).

Базисные векторы выберем в виде:

$$|1+2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1+1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1-1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1-2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (1.27)$$

$J_3|2,+2\rangle = +2|2,+2\rangle$, $J_3|2,+1\rangle = +1|2,+1\rangle$, $J_3|2,0\rangle = 0|2,0\rangle$, $J_3|2,-1\rangle = -1|2,-1\rangle$, $J_3|2,-2\rangle = -2|2,-2\rangle$.

А сейчас формально положим J = 1/2, хотя строго говоря мы этого делать не вправе. Полученные матрицы с точностью до фактора 1/2 суть известные матрицы Паули:

$$J_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (1.28)$$

Эти матрицы действуют в линейном пространстве, натянутом на два 2-мерных базисных вектора

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}. \tag{1.29}$$

Возникает реальная возможность описать состояния со спином или изоспином 1/2. Но корректно это можно сделать только переходом к другой группе, которая содержит все представления группы вращений O(3) плюс представления, соответствующие состояниям с полуцелым спином (или изоспином, для группы это все равно). Это группа SU(2).

Содержание Продолжение

1.4 Унитарная унимодулярная группа SU(2)

Итак, познакомившись с группой 3-мерных вращений, в которой размерность минимального нетривиального (отличного от 1) представления равна 3, рассмотрим более сложную группу, в которой есть представление размерности 2. Для этого зададим совокупность 2 x 2 унитарных унимодулярных матриц U, т.е., $U^+U = 1$, $\det U = 1$. Такая матрица U может быть выражена в виде

$$U = e^{i\sigma_k a_k}, \tag{1.30}$$

σ_k, k = 1, 2, 3 - эрмитовы матрицы, $\sigma_k^+ = \sigma_k$, которые мы выбираем в виде матриц Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{1.31}$$

а a_k, k = 1, 2, 3 - произвольные вещественные числа. Эти матрицы образуют группу с обычным законом умножения матриц и реализуют присоединенное или тождественное представление размерности 2, натянутом на два базисных вектора.

Замечательно, что матрицы Паули подчиняются тем же коммутационным соотношениям, что и генераторы группы вращений O(3). Попытаемся связать поэтому эти матрицы с обычным 3-мерным вектором $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Для этого каждому вектору сопоставим величину $X = \vec{\sigma}\vec{x}$

$$X_b^a = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix}, \ a,b = 1,2. \tag{1.32}$$

Детерминант $\det X_b^a = -\vec{x}^2$ т.е. определяет квадрат длины вектора. Взяв совокупность унитарных унимодулярных матриц U , $U^+U = 1$, $\det U = 1$ в 2-мерном пространстве, определим

$$X' = U^+XU ,$$

причем $\det X' = \det(U^+XU) = \det X = -\vec{x}^2$ Мы делаем вывод, что преобразования U оставляют

инвариантной длину вектора и, стало быть, соответствуют вращениям в 3-мерном пространстве, причем $\pm U$ соответствуют одному и тому же вращению. Соответствующая алгебра SU(2) задается эрмитовыми матрицами σ_k, k = 1, 2, 3, с коммутационными соотношениями

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k,$$

а $U = e^{i\sigma_k a_k}$.
И также как в группе вращений O(3) представление низшей размерности 3 задается тремя независимыми базисными векторами, например, x, y, z, в SU(2) 2 - мерное представление задается двумя независимыми спинорами, которые можно выбрать как

$$q^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad q^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1.33}$$

Прямое произведение двух спиноров q^α и q^β можно разложить в прямую сумму двух неприводимых представлений (НП) просто симметризуя и антисимметризуя произведение:

$$q^\alpha \times q^\beta = \frac{1}{2}(q^\alpha q^\beta + q^\beta q^\alpha) + \frac{1}{2}[q^\alpha q^\beta - q^\beta q^\alpha] \equiv T^{\{\alpha\beta\}} + T^{[\alpha\beta]}. \tag{1.34}$$

Симметричный тензор 2-го ранга имеет размерностиn $d_S^n = n(n+1)/2$ и для n=2 $d_S^2 = 3$, что видно из матричного представления:

$$T^{\{\alpha\beta\}} = \begin{pmatrix} T^{11} & T^{12} \\ T^{12} & T^{22} \end{pmatrix} \tag{1.35}$$

и мы учли, что $T^{\{21\}} = T^{\{12\}}$.

Антисимметричный тензор 2-го ранга имеет размерность $d_A^n = n(n-1)/2$ и для n = 2 $d_A^2 = 1$, что видно из его матричного представления

$$T^{[\alpha\beta]} = \begin{pmatrix} 0 & T^{12} \\ -T^{12} & 0 \end{pmatrix} \tag{1.36}$$

и мы учли , что $T^{[21]} = T^{[12]}$, $T^{[11]} = T^{[22]} = 0$. В соответствии с этим абсолютно антисимметричный тензор 2-го ранга $\varepsilon_{\alpha\beta}$ ($\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = 1$) преобразуется также как синглет группы SU(2), и мы можем использовать его при необходимости для редукции индексов SU(2), *не изменяя размерности представления*. Этот тензор может служить для "поднятия" и "опускания" индексов в SU(2).

$$\varepsilon_{\alpha'\beta'} = u^{\alpha}_{\alpha'} u^{\beta}_{\beta'} \varepsilon_{\alpha\beta} :$$
$$\varepsilon_{12} = u^1_1 u^2_2 \varepsilon_{12} + u^2_1 u^1_2 \varepsilon_{21} = \mathrm{Det}\ U \varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}, \tag{1.37}$$

так как Det U = 1. (Аналогично для ε_{21}.)

Содержание | Продолжение

1.5 SU(2) как группа спина

Ассоциируя q^α со спиновыми функциями объекта со спином 1/2, причем $q^1 \equiv \left|\uparrow\right\rangle$ и $q^2 \equiv \left|\downarrow\right\rangle$ являются базисными спинорами с проекциями спина +1/2 и -1/2, соответственно, (это барионы спина 1/2 и кварки, как мы увидим позже), мы можем образовать симметричный тензор $T^{\{\alpha\beta\}}$ с тремя компонентами

$$\begin{aligned} T^{\{11\}} &= q^1 q^1 \equiv \left|\uparrow\uparrow\right\rangle, \\ T^{\{12\}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(q^1 q^2 + q^2 q^1) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\right\rangle, \\ T^{\{22\}} &= q^2 q^2 \equiv \left|\downarrow\downarrow\right\rangle, \end{aligned} \tag{1.38}$$

и мы ввели $1/\sqrt{2}$, чтобы нормировать эту компоненту на 1.

Ассоциируя опять q^α со спиновыми функциями объекта со спином 1/2, запишем единственную компоненту синглета в виде

$$T^{[12]} = \frac{1}{\sqrt{2}}(q^1 q^2 - q^2 q^1) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\right\rangle, \tag{1.39}$$

и мы ввели $1/\sqrt{2}$ для нормировки на единицу.

Для примера образуем произведение спинора q^α и ему сопряженного спинора q_β с базисными спинорами в виде строк (1 0) and (0 1). Разложение в сумму НП достигается здесь вычитанием шпура (напомним, что матрицы Паули бесшпуровые)

$$q^\alpha \times q_\beta = (q^\alpha q_\beta - \frac{1}{2}\delta^\alpha_\beta) + \frac{1}{2}\delta^\alpha_\beta \equiv T^\alpha_\beta + \delta^\alpha_\beta I, \tag{1.40}$$

где T^α_β - бесшпуровый тензор размерности $d_V = (n^2 - 1)$, соответствующий векторному представлению группы SU(2) и имеющий для n = 2 размерность 3; I - единичная матрица, соответствующая единичному представлению. Группа SU(2) так мала, что оба ее НП $T^{\{\alpha\beta\}}$ и T^α_β соответствуют одному и тому же НП размерности 3, тогда как НП $T^{[\alpha\beta]}$ соответствует

скалярному НП как и $\delta^{\alpha}_{\beta}I$. Для n $\neq$ 2 это не так, как будет видно дальше.

Еще один пример разложения произведения двух НП дается произведением

$$T^{[ij]} \times q^k = \frac{1}{4}(q^i q^j q^k - q^j q^i q^k - q^i q^k q^j + q^j q^k q^i - q^k q^j q^i + q^k q^i q^j) + \\ + \frac{1}{4}(q^i q^j q^k - q^j q^i q^k + q^i q^k q^j - q^j q^k q^i + q^k q^j q^i - q^k q^i q^j) = T^{[ikj]} + T^{[ik]j} \quad (1.41)$$

или через размерности НП:

$$\frac{n(n-1)}{2} \times n = \frac{n(n^2-3n+2)}{6} + \frac{n(n^2-1)}{3}.$$

При n = 2 антисимметричный тензор 3-го ранга тождественно равен нулю. Таким образом у нас остается тензор смешанной симметрии $T^{[ik]j}$ размерности 2 при n = 2, т.е., описывающий состояние спина 1/2. Его можно свернуть с абсолютно антисимметричным тензором

$$e_{ik}T^{[ik]}q^j \equiv t^j_A,$$

и t^j_A - это как раз НП, соответствующее одному из двух способов образовать состояние спина 1/2 из трех состояний спина 1/2 (когда два из этих состояний антисимметричны). Состояние спина 1/2 с проекцией s_z = +1/2 есть

$$t^1_A = \frac{1}{\sqrt{2}}(q^1 q^2 - q^2 q^1)q^1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow\right\rangle. \quad (1.42)$$

(Здесь $q^1 = |\uparrow\rangle$ и $q^2 \equiv |\downarrow\rangle$.)

Последний пример - разложение произведения симметричного тензора $T^{\{ij\}}$ и спинора q^k

$$T^{\{ij\}} \times q^k = \frac{1}{4}(q^i q^j q^k + q^j q^i q^k + q^i q^k q^j + q^j q^k q^i + q^k q^j q^i + q^k q^i q^j) + \\ + \frac{1}{4}(q^i q^j q^k + q^j q^i q^k - q^i q^k q^j - q^j q^k q^i - q^k q^j q^i - q^k q^i q^j) = T^{\{ijk\}} + T^{\{ij\}k} \quad (1.43)$$

или через размерности НП:

$$\frac{n(n+1)}{2}\times n=\frac{n(n^2+3n+2)}{6}+\frac{n(n^2-1)}{3}.$$

Симметричный тензор 3-го ранга размерности 4 описывает состояние со спином s = 3/2, (2s + 1) = 4. А тензор смешанной симметрии описывает состояние со спином 1/2, составленного из трех состояний спина 1/2:

$$e_{jk}T^{\{ij\}}q^k \equiv T_s^j,$$

и T_s^j это как раз НП, соответствующее второму способу образовать состояние спина 1/2 из трех состояний спина 1/2 (когда два из этих состояний симметричны). Состояние спина 1/2 с проекцией $s_z = +1/2$ есть

$$T_s^1=\frac{1}{\sqrt{6}}(e_{12}2q^1q^1q^2+e_{21}(q^2q^1+q^1q^2)q^1\equiv\frac{1}{\sqrt{6}}\left|2\uparrow\uparrow\downarrow-\uparrow\downarrow\uparrow-\downarrow\uparrow\uparrow\right\rangle. \qquad (1.44)$$

Содержание Продолжение

1.6 Группа изоспина SU(2)

Рассмотрим теперь одно из важных применений теории групп и их представлений в физике элементарных частиц. Речь пойдет о классификации элементарных частиц с помощью теории групп. В качестве простого примера рассмотрим протон и нейтрон. Давно известно, что протон и нейтрон обладают близкими массами и близкими свойствами относительно сильных взаимодействий. Именно поэтому в сильных взаимодействиях Гейзенберг предложил рассматривать их как одно состояние. Но для этого надо найти группу, в которой наинизшее нетривиальное представление имеет размерность 2. Попробуем здесь применить формализм группы SU(2), имеющей 2-мерный спинор в качестве базиса представления. Введем группу изотопических преобразований $SU(2)_I$. Определим нуклон как состояние с изотопическим спином I = 1/2 с двумя проекциями (протоном с $I_3 = 1/2$ и нейтроном $I_3 = -1/2$) в этом придуманном изотопическом пространстве, проводя практически полную аналогию с введением спина 1/2 в обычном пространстве. Обычно базис двумерного представления группы $SU(2)_I$ записывается как изотопический спинор

$$N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}, \tag{1.45}$$

что означает, что протон и нейтрон определены как

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1.46}$$

Представление размерности 2 реализуется матрицами Паули 2x2 τ_k , k = 1, 2, 3 (вместо σ_i , i = 1, 2, 3, которые мы оставляем для описания спина 1/2 в обычном пространстве), при этом изотопический оператор
$\tau^+ = 1/2(\tau_1 + i\tau_2)$ переводит нейтрон в протон, а $\tau^- = 1/2(\tau_1 - i\tau_2)$, соответственно, переводит протон в нейтрон. Известен также изодублет каскадных гиперонов спина 1/2 $\Xi^{0,-}$ с массами ~ 1320 МэВ. Давно известны дублет странных мезонов спина 0 $K^{+,0}$ с массами ~ 490 МэВ и антидублет их античастиц $\overline{K}^{0,-}$.

А как описать частицы с I = 1? Скажем, триплет π-мезонов π^+, π^-, π^0 спина ноль отрицательной четности с массами $m(\pi^{\pm}) = 139.5675 \pm 0.0004$ МэВ, $m(\pi^0) = 134{,}9739 \pm 0{,}0006$ МэВ и практически одинаковыми свойствами по сильным взаимодействиям? В группе (изотопических) вращений мы бы задали изотопический вектор $\vec{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ в качестве

базиса (где действительные псевдоскалярные поля $\pi_{1,2}$ связаны с заряженными пионами $\pi^{\pm}$ формулами $\pi^{\pm} = \pi_1 \pm i\pi_2$, а $\pi^0 = \pi_3$), генераторы A_k, k = 1, 2, 3, в качестве представления алгебры и матрицы R_k, k = 1, 2, 3 в качестве представления группы, где углы θ_k определены в изотопическом пространстве.

Используя результаты предыдущего параграфа, изотопическому триплету **вещественных полей** $\vec{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ в $SU(2)_I$ сопоставляется базис вида

$$\pi_b^a = \begin{pmatrix} \pi_3/\sqrt{2} & (\pi_1 - i\pi_2)/\sqrt{2} \\ (\pi_1 + i\pi_2)/\sqrt{2} & -\pi_3/\sqrt{2} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 & \pi^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 \end{pmatrix}, \qquad (1.47)$$

где заряженные пионы описываются **комплексными полями** $\pi^{\pm} = (\pi_1 \mp i\pi_2)/\sqrt{2}$. Итак, пионы могут быть заданы в изотопическом формализме в виде двумерных матриц:

$$\pi^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \pi^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \pi^0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad (1.48)$$

которые образуют базис представления размерности 3, а само представление задается, как уже говорилось, унитарными унимодулярными матрицами 2x2 U. Подобным образом описываются частицы произвольного спина с изоспином I = 1. Из мезонов следует помнить изотриплет векторых мезонов $\rho^{\pm,0}$ с массой ~ 760 МэВ.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\rho^0 & \rho^+ \\ \rho^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\rho^0 \end{pmatrix}. \qquad (1.49)$$

Среди частиц с полуцелым спином укажем, например, изотриплет открытых к началу 60-х годов странных гиперонов спина 1/2 с массами ~1192 МэВ $\Sigma^{\pm}, \Sigma^0$ который запишется в базисе SU(2) как

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 & \Sigma^+ \\ \Sigma^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 \end{pmatrix}. \qquad (1.50)$$

Представление размерности 3 задается теми же матрицами U.

Напомним еще раз, что экспериментально изотопический спин определяется по числу частиц N = (2I + 1), близких по своим свойствам, т.е., имеющим одинаковый спин, близкие (на уровне процента) массы и практически одинаковые свойства по сильному взаимодействию. К примеру, при массе, близкой к 1115 МэВ была обнаружена только одна частица спина 1/2 со странностью S = -1 - это гиперон Λ с нулевым электрическим зарядом и массой 1115,63 $\pm$ 0,05 МэВ. Естественно, что этой частице был приписан изотопический спин ноль. Таким же образом был определен изоспин I = 0 псевдоскалярного мезона η (548).

Известен также триплет барионных резонансов со спином 3/2, странностью S = - 1 и массами M(Σ^{*+}(1385)) =1382,8 $\pm$ 0,4 МэВ, M(Σ^{*0}(1385)) =1383,7 $\pm$ 1,0 МэВ, M(Σ^{*-}(1385)) =1387,2 $\pm$ 0,5 МэВ, (резонансы - это частицы, распадающиеся по сильному взаимодействию и потому обладающие очень коротким временем жизни; одно время активно обсуждался вопрос, стоит ли их зачислять в "элементарные") $\Sigma^{*\pm,0}(1385) \to \Lambda^0\pi^{\pm,0}(88 \pm 2\%)$ или $\Sigma^{*\pm,0}(1385) \to \Sigma\pi(12 \pm 2\%)$ (можно еще встретить другое обозначение для этого резонанса - Y^*_1(1385)).

Известно только одно состояние с изотопическим спином I = 3/2 (т.е., на эксперименте нашли 4 практически одинаковых состояния, отличающихся только зарядом) - это четверка нуклонных резонансов со спином J = 3/2 Δ^{++}(1232), Δ^{+}(1232), Δ^{0}(1232), Δ^{-}(1232), распадающаяся на пион и нуклон (измеренная разность масс $M_{\Delta^+} - M_{\Delta^0}$ = 2,7 $\pm$ 0,3 МэВ). (Используется и другое обозначение - N*(1232).)

В системе $\Xi^{0,-}\pi^{\pm,0}$ было обнаружено только два резонанса со спином 3/2 $\Xi^{*0,-}$ с массами ~1520 МэВ, поэтому они помещены в изодублет с изоспином I = 1/2.

Использование формализма изотопического спина позволяет не только экономно расклассифицировать множество сильновзаимодействующих частиц (адронов) по изотопическим мультиплетам, но и связать между собой амплитуды распадов, а также амплитуды рассеяния частиц, входящих в одни и те же изотопические мультиплеты.

Подробнее мы не будем останавливаться на этих соотношениях, поскольку они являются частью соотношений, возникающих в рамках более высоких групп симметрии, к рассмотрению которых мы и переходим.

В конце этого раздела напомним еще вид соотношения Гелл-Манна-Нишиджимы между зарядом Q, 3-ей компонентой изоспина I_3 и гиперзарядом Y = S + B, где S - странность, B - барионное число (+1 для барионов, -1 для антибарионов, 0 для мезонов):

$$Q = I_3 + Y/2. \tag{1.51}$$

Поскольку Q есть интеграл по гиперповерхности от 4-ой компоненты электромагнитного тока, это означает, что электромагнитный ток является суперпозицией 3-ей компоненты изовекторного тока и изоскалярного гиперзарядового тока.

Содержание Продолжение

1.7 Группа унитарной симметрии SU(3)

Познакомимся теперь с более сложной группой Ли - с группой 3-мерных унитарных унимодулярных матриц SU(3), сыгравшей и играющей в современной физике элементарных частиц совершенно замечательную роль. Эта группа уже 8-параметрическая. (Действительно, произвольная комплексная матрица 3 X 3 зависит от 18 вещественных параметров, условие унитарности уменьшает их число вдвое, а условие унимодулярности убирает еще один параметр.)

Переход к 8-параметрической группе SU(3) можно сделать непосредственно от 3-параметрической группы SU(2), заменив 2-мерные унитарные унимодулярные матрицы U на 3-мерные, а к соответствующей алгебре - заменив матрицы Паули σ_k, k = 1, 2, 3 на матрицы Гелл-Манна λ_α, α = 1,..., 8:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.52}$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(27)

которые удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\left[\frac{1}{2}\lambda_i, \frac{1}{2}\lambda_j\right] = if_{ijk}\frac{1}{2}\lambda_k,$$

где $f_{123} = 1$, $f_{147} = 1/2$, $f_{156} = -1/2$, $f_{246} = 1/2$, $f_{257} = 1/2$, $f_{346} = 1/2$, $f_{367} = -1/2$, $f_{458} = \sqrt{3}/2$, $f_{678} = \sqrt{3}/2$

(Подобным образом, набравшись терпения, можно построить представление алгебры размерности n для любой унитарной группы SU(n) при конечном n.) Эти матрицы реализуют 3-мерное представление алгебры группы SU(3) с базисными спинорами

$$q^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad q^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad q^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1.53}$$

Представление размерности 8 задается матрицами 8x8 в линейном пространстве, натянутом на базисные спиноры

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.54}$$

Но подобно тому, как в SU(2) любой 3-вектор можно записать в виде бесшпуровой матрицы

2x2, любой 8-вектор в SU(3) X = (x_1,..., x_8) можно задать в виде матрицы 3x3 :

$$X_\beta^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{8}\lambda_k x_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} x_3+\frac{1}{\sqrt{3}}x_8 & x_1-ix_2 & x_4-ix_5 \\ x_1+ix_2 & -x_3+\frac{1}{\sqrt{3}}x_8 & x_6-ix_7 \\ x_4+ix_5 & x_6+ix_7 & -\frac{2}{\sqrt{3}}x_8 \end{pmatrix}. \qquad (1.55)$$

В левом верхнем углу мы сразу видим предыдущее выражение (1.32) из SU(2).

Прямое произведение двух спиноров q^α и q^β можно разложить в точности также, как и в случае SU(2) (но теперь α, β = 1, 2, 3) симметризуя и антисимметризуя по индексам:

$$q^\alpha \times q^\beta = \frac{1}{2}(q^\alpha q^\beta + q^\beta q^\alpha) + \frac{1}{2}[q^\alpha q^\beta - q^\beta q^\alpha] \equiv T^{\{\alpha\beta\}} + T^{[\alpha\beta]}. \qquad (1.56)$$

Симметричный тензор 2-го ранга имеет размерность $d_S^n = n(n+1)/2$ и для n = 3 $d_S^3 = 6$, что видно из матричного представления:

$$T^{\{\alpha\beta\}} = \begin{pmatrix} T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{12} & T^{22} & T^{23} \\ T^{13} & T^{23} & T^{33} \end{pmatrix}, \qquad (1.57)$$

и здесь учтено, что $T^{\{ik\}} = T^{\{ki\}} \equiv T^{ik}$ ($i \neq k$, i, k = 1, 2, 3). Антисимметричный тензор 2-го ранга имеет размерность $d_A^n = n(n-1)/2$ и для n = 3 $d_A^3 = 3$, что также видно из матричного представления:

$$T^{[\alpha\beta]} = \begin{pmatrix} 0 & t^{12} & t^{13} \\ -t^{12} & 0 & t^{23} \\ -t^{13} & -t^{23} & 0 \end{pmatrix}, \qquad (1.58)$$

и мы учли, что $T^{[ik]} = -T^{[ki]} \equiv t^{ik}$ ($i \neq k$, i, k = 1, 2, 3) и $T^{[11]} = T^{[22]} = T^{[33]} = 0$.

Через размерности разложение можно записать как

$$n \times n = n(n+1)/2|_{SS} + n(n-1)/2|_{AA},$$

или для n = 3 $3 \times 3 = 6 + \overline{3}$. Рассмотрим в качестве примера произведение спинора q^{α} и ему сопряженного спинора q_{β}, чьи базисные вектора представимы как три строки (1 0 0), (0 1 0) и (0 0 1). И здесь разложение на сумму НП достигается вычитанием шпура (напомним, что матрицы Гелл-Манна бесшпуровые)

$$q^{\alpha} \times q_{\beta} = (q^{\alpha} q_{\beta} - \frac{1}{2}\delta^{\alpha}_{\beta}) + \frac{1}{2}\delta^{\alpha}_{\beta} \equiv T^{\alpha}_{\beta} + \delta^{\alpha}_{\beta} I, \qquad (1.59)$$

где T^{α}_{β} - бесшпуровый тензор размерности $d_V = (n^2 - 1)$, соответствующий присоединенному (иногда говорят "векторному") представлению группы SU(3), имеющий при n = 3 размерность 8; I - единичная матрица, соответствующая единичному (или скалярному) НП. Через размерности это запишется как $n \times \overline{n} = (n^2 - 1) + 1_n$ или для n = 3 $3 \times \overline{3} = 8 + 1$.

Приведем еще один пример довольно сложного разложения, используемого, в частности, в вычислениях глюонных поправок к электрослабым взаимодействиям. Это разложение симметризованного произведения токов L^{α}_{β}, R^{γ}_{ρ} в сумму НП:

$$\begin{aligned} 4\{L^{\alpha}_{\beta} R^{\gamma}_{\rho}\} &= 2T^{\{\alpha\gamma\}}_{\{\beta\rho\}} + 2T^{[\alpha\gamma]}_{[\beta\rho]} + P^{\{\alpha\gamma\}}_{[\beta\rho]} + P^{[\alpha\gamma]}_{\{\beta\rho\}} + \\ &+ \frac{8}{n^2-1}[\frac{1}{n}\delta^{\alpha}_{\beta}\delta^{\gamma}_{\rho} - \delta^{\alpha}_{\rho}\delta^{\gamma}_{\beta}](1_n) - \frac{2}{n}(\delta^{\alpha}_{\rho} A^{\gamma}_{\beta} - \delta^{\gamma}_{\beta} A^{\alpha}_{\rho}) - \\ &- \frac{8}{n^2-4}(\delta^{\alpha}_{\beta} S^{\gamma}_{\rho} - \delta^{\gamma}_{\rho} S^{\alpha}_{\beta}) + \frac{8}{n^2-1}(\delta^{\alpha}_{\rho} S^{\gamma}_{\beta} - \delta^{\gamma}_{\beta} S^{\alpha}_{\rho}), \end{aligned} \qquad (1.60)$$

где $T^{\{\alpha\gamma\}}_{\{\beta\rho\}} \equiv N_{SS}$ - бесшпуровый тензор 4-го ранга, симметричный по двум верхним и двум нижним индексам, размерности $N_{SS} = [n^2(n + 1)^2/4 - n^2]$:

$$T^{\{\alpha\gamma\}}_{\{\beta\rho\}} = (L^\alpha_\beta, R^\gamma_\rho) + (L^\gamma_\rho, R^\alpha_\beta) + (L^\alpha_\rho, R^\gamma_\beta) + (L^\gamma_\beta, R^\alpha_\rho) -$$
$$- \frac{2}{n+2}[\delta^\alpha_\beta S^\gamma_\rho + \delta^\gamma_\rho S^\alpha_\beta + \delta^\alpha_\rho S^\gamma_\beta + \delta^\gamma_\beta S^\alpha_\rho) +$$
$$+ \frac{4}{n^2+n}[\delta^\alpha_\beta \delta^\gamma_\rho + \delta^\alpha_\rho \delta^\gamma_\beta](1_n), \qquad (1.61)$$

$T^{[\alpha\gamma]}_{[\beta\rho]} \equiv N_{AA}$ - бесшпуровый тензор 4-го ранга, антисимметричный по двум верхним и двум нижним индексам, размерности $N_{AA} = [n^2(n - 1)^2/4 - n^2]$ ($n \geq 4$, так как при n = 3 это НП сводится к октету, уже имеющемуся в разложении)

$$T^{[\alpha\gamma]}_{[\beta\rho]} = (L^\alpha_\beta, R^\gamma_\rho) + (L^\gamma_\rho, R^\alpha_\beta) - (L^\alpha_\rho, R^\gamma_\beta) - (L^\gamma_\beta, R^\alpha_\rho) +$$
$$+ \frac{2}{n-2}[\delta^\alpha_\beta S^\gamma_\rho + \delta^\gamma_\rho S^\alpha_\beta - \delta^\alpha_\rho S^\gamma_\beta - \delta^\gamma_\beta S^\alpha_\rho) +$$
$$+ \frac{4}{n^2-n}[\delta^\alpha_\beta \delta^\gamma_\rho - \delta^\alpha_\rho \delta^\gamma_\beta](1_n); \qquad (1.62)$$

два тензора 2-го ранга присоединенного представления размерности $N_{SA} = (n^2 - 1)$, симметричный:

$$2S^\alpha_\beta = (L^\alpha_\sigma, R^\sigma_\beta) + (L^\sigma_\beta, R^\alpha_\sigma) - \frac{4}{n}\delta^\alpha_\beta(1_n) \qquad (1.63)$$

и антисимметричный

$$2A^\alpha_\beta = (L^\alpha_\sigma, R^\sigma_\beta) - (L^\sigma_\beta, R^\alpha_\sigma) \qquad (1.64)$$

и скалярное представление

$$2(1_n) = \mathrm{Tr}\{L^{\alpha}_{\beta}, R^{\gamma}_{\rho}\} = \{L^{\eta}_{\sigma}, R^{\sigma}_{\eta}\} \tag{1.65}$$

НП смешанной симметрии, описываемые тензорами 4-го ранга $P^{\{\alpha\delta\}}_{[\beta\rho]} \equiv N^{S}_{A}$ и N^{A}_{S} размерности $N^{S}_{A} = N^{A}_{S} = [n^2(n^2 - 1)/4 - n^2 + 1]$, входящие в разложение произведения токов, имеют вид

$$P^{\{\alpha\delta\}}_{[\beta\rho]} + P^{[\alpha\delta]}_{\{\beta\rho\}} = 2\{L^{\alpha}_{\beta}, R^{\gamma}_{\rho}\} - 2\{L^{\gamma}_{\rho}, R^{\alpha}_{\beta}\} + \frac{2}{n}(\delta^{\alpha}_{\rho}A^{\gamma}_{\beta} - \delta^{\gamma}_{\beta}A^{\alpha}_{\rho}), \tag{1.66}$$

$$P^{\{\alpha\delta\}}_{[\beta\rho]} - P^{[\alpha\delta]}_{\{\beta\rho\}} = -2\{L^{\alpha}_{\beta}, R^{\gamma}_{\rho}\} + 2\{L^{\gamma}_{\rho}, R^{\alpha}_{\beta}\} - \frac{2}{n}(\delta^{\alpha}_{\rho}A^{\gamma}_{\beta} - \delta^{\gamma}_{\beta}A^{\alpha}_{\rho}). \tag{1.67}$$

[SU(3)] При n = 3 $8\times 8 = 27_{SS} + 10^{A}_{S} + 10^{*S}_{A} + 8_{S} + 8_{A} + 1,$

[SU(4)] при n = 4 $15\times 15 = 84_{SS} + 20_{AA} + 45^{A}_{S} + 45^{*S}_{A} + 15_{S} + 15_{A} + 1,$

[SU(5)] при n = 5 $24\times 24 = 200_{SS} + 75_{AA} + 126^{A}_{S} + 126^{*S}_{A} + 24_{S} + 24_{A} + 1,$

[SU(6)] при n = 6 $35\times 35 = 405_{SS} + 189_{AA} + 280^{A}_{S} + 280^{*S}_{A} + 35_{S} + 35_{A} + 1.$

На этом мы пока закончим изложение формализма и перейдем к проблеме классификации частиц по представлениям группы SU(3) и некоторым их следствиям.

Содержание | Продолжение

2.1 Восьмеричный путь. Массовые формулы в SU(3)

Вернемся к барионам $1/2^+$ и мезонам 0^-. Как мы помним, их набралось как раз по 8 штук: 8 барионов - изодублеты нуклона (протон и нейтрон) и каскадных гиперонов $\Xi^{0,-}$, изотриплет Σ-гиперонов и изосинглет Λ, и 8 мезонов - изотриплет π, два изодублета странных K-мезонов и изосинглет η. Попробуем написать барионы $B(1/2^+)$ в виде 8-вектора действительных полей $B = (B_1,..., B_8) = (\vec{\Sigma}, N_4, N_5, B_6, B_7, B_8)$, где $\vec{\Sigma} = (B_1, B_2, B_3) = (\Sigma_1, \Sigma_3, \Sigma_3)$. Тогда базисный вектор представления размерности 8 запишется в матричной форме следующим образом:

$$B_\beta^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{8}\lambda_k B_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \Sigma_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}B_8 & \Sigma_1 - i\Sigma_2 & N_4 - iN_5 \\ \Sigma_1 + i\Sigma_2 & -\Sigma_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}B_8 & B_6 - iB_7 \\ N_4 + iN_5 & B_6 + iB_7 & -\frac{2}{\sqrt{3}}B_8 \end{pmatrix} = \tag{2.1}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda^0 & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda^0 & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\Lambda^0 \end{pmatrix}.$$

В левом верхнем углу мы сразу видим предыдущее выражение (16) из теории изотопической группы SU(2). Аналогичным образом псевдоскалярные мезоны запишутся в виде 3x3 матрицы как

$$P_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta & K^0 \\ K^- & \overline{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\eta \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

Итак, классификация оказалась удачной: вместо 16 отдельно взятых частиц у нас теперь всего два унитарных мультиплета. Каковы ее следствия? Важнейшим явилось получение массовыхе формул, i.e., впервые удалось связать между собой массы различных элементарных частиц с одинаковым спином.

2.1.1 Массовые формулы для октета псевдоскалярных мезонов

Массовый член в лагранжиане для псевдоскалярного мезона, описываемого волновой функцией P , имеет вид, квадратичный по массе (с тем, чтобы уравнение Лагранжа-Эйлера для полного лагранжиана свободного точечного мезона приводило к уравнению Клейна-Гордона, где масса мезона входит квадратично)

$$L_m^P = m_P^2 P^2, \tag{2.3}$$

а для октета таких мезонов с вырожденными массами:

$$L_m^P = m_P^2 P_\beta^\alpha P_\alpha^\beta \tag{2.4}$$

(по повторяющимся индексам подразумевается суммирование), тогда как m_π =140 МэВ, m_K = 490 МэВ, m_η = 548 МэВ. Гелл-Манн предложил отказаться от принципа, что лагранжиан должен быть скаляром по группе симметрии сильных взаимодействий, в данном случае по группе SU (3), и ввести нарушение симметрии, но таким образом, чтобы сохранялся изотопический спин и странность (или гиперзаряд Y = S + B, где B -барионный заряд, для мезонов равный нулю). Для этого член, нарушающий симметрию, должен иметь нулевые значения изоспина и гиперзаряда. Гелл-Манн предложил простое решение - массовый член должен преобразовываться как компонента 33 октета, выделенного из прямого произведения двух октетов, в которые входят эти мезоны. Сначала в произведении двух октетов, входящих в лагранжиан, надо выделить октет. Естественно свернуть произведение $P_\eta^\alpha P_\gamma^\beta$ по верхнему и нижнему индексам $P_\gamma^\alpha P_\beta^\gamma$ или $P_\beta^\gamma P_\gamma^\alpha$ и вычесть шпур с тем, чтобы образовать правильные октеты

$$M_\beta^\alpha = P_\gamma^\alpha P_\beta^\gamma - \frac{1}{3} P_\gamma^\eta P_\eta^\gamma, \qquad N_\beta^\alpha = P_\beta^\gamma P_\gamma^\alpha - \frac{1}{3} P_\gamma^\eta P_\eta^\gamma \tag{2.5}$$

$M_\alpha^\alpha = 0$, $N_\alpha^\alpha = 0$ (по повторяющимся индексам подразумевается суммирование). Компоненты 33 этих октетов M_3^3 и N_3^3 и послужат искомыми членами, нарушающими симметрию массовой

части лагранжиана L_m^P Следует только учесть, что в октете мезонов содержатся и частицы, и античастицы. Поэтому для того, чтобы массы частиц и античастиц оказались одинаковыми, оба нарушающих массовых члена должны входить с одинаковыми коэффициентами. В итоге можно записать массовый член лагранжиана в виде

$$L_m^P = m_P^2 P_\beta^\alpha P_\alpha^\beta + m_{1P}^2 (M_3^3 + N_3^3) = m_{0P}^2 P_\beta^\alpha P_\alpha^\beta + m_{1P}^2 (P_\beta^3 P_3^\beta + P_3^\alpha P_\alpha^3). \quad (2.6)$$

Собирая коэффициенты при одинаковых билинейных комбинациях псевдоскалярных полей, получим:

$$m_\pi^2 = m_{0P}^2, \qquad m_K^2 = m_{0P}^2 + m_{1P}^2, \qquad m_\eta^2 = m_{0P}^2 + \frac{4}{3} m_{1P}^2, \quad (2.7)$$

откуда немедленно следует соотношение

$$4m_K^2 = 3m_\eta^2 + m_\pi^2, \qquad 4 \cdot 0.245 = 3 \cdot 0.30 + 0.02 \ (\text{ГэВ})^2. \quad (2.8)$$

Согласие получилось впечатляющее, учитывая прозрачность заложенных предположений и простоту формализма.

2.1.2 Массовые формулы для октета барионов $J^P = 1/2^+$

Массовый член бариона B с $J^P = 1/2^+$ в лагранжиане линеен по массе (с тем, чтобы уравнение Лагранжа-Эйлера для полного лагранжиана свободного точечного бариона приводило к уравнению Дирака, где масса бариона входит линейно).

$$L_m^B = m_B \overline{B} B. \quad (2.9)$$

Для октета барионов B_α^β с вырожденными массами соответствующая часть лагранжиана имеет вид

$$L_m^B = m_B \overline{B}_\beta^\alpha B_\alpha^\beta, \quad (2.10)$$

Но реальные массы вовсе не вырождены: $m_N = 940$, $m_\Sigma = 1192$, $m_\Lambda = 1115$ $m_\Xi = 1320$ (в МэВ).

Гелл-Манн и здесь предложил ввести нарушение масс, нарушив определенным образом

симметрию лагранжиана:

$$L_m^B = m_0 \overline{B}_\beta^\alpha B_\alpha^\beta + m_1 \overline{B}_\beta^3 B_3^\beta + m_2 \overline{B}_3^\alpha B_\alpha^3. \qquad (2.11)$$

Отметим, что здесь возникает два члена с 33-компонентой, что связано с тем, что, в отличие от случая мезонов, $m_1 \neq m_2$. (В мезонный октет входят частицы и античастицы, а барионы и антибарионы образуют два разных октета.) Тогда для отдельных барионов получим:

$$p = B_1^3, \quad n = B_2^3, \quad m_p = m_n = m_0 + m_1,$$

$$\Sigma^+ = B_2^1, \quad \Sigma^- = B_1^2, \qquad m_{\Sigma^{\pm,0}} = m_0,$$

$$-\frac{2}{\sqrt{6}}\Lambda = B_3^3, \qquad m_\Lambda = m_0 + \frac{2}{3}(m_1 + m_2), \qquad (2.12)$$

$$\Xi^- = B_1^3, \qquad \Xi^0 = B_2^3, \qquad m_{\Xi^{-,0}} = m_0 + m_2.$$

Отсюда немедленно следует знаменитая формула Гелл-Манна-Окубо:

$$2(m_N + m_\Xi) = m_\Sigma + 3m_\Lambda, \qquad 2(940 + 1320) = 1192 + 3 \cdot 1115. \qquad (2.13)$$

(Значения левой и правой частей даны в МэВ.) Согласие с опытом превосходно, что послужило стимулом к дальнейшему применению теории унитарных групп Ли в физике частиц.

2.1.3 Нонет векторных мезонов и массовые формулы

Массовая формула для векторных мезонов та же, что и для псевдоскалярных мезонов (на унитарное пространство не влияют спиновые индексы).

Но векторных мезонов оказалось не 8, а 9, поэтому применим массовую формулу для мезонов, приняв заранее ее справедливость, для определения массы изоскалярного векторного мезона ω_0, входящего в октет:

$$m_{\omega_0}^2 = \frac{1}{3}\left(4m_{K^*}^2 - m_\rho^2\right), \qquad (2.14)$$

откуда m_{ω_0} = 930 МэВ. Но изоскалярного векторного мезона с такой массой нет. Есть ω_0 с массой m_{ω_0} = 783 МэВ и φ с массой m_{φ} = 1020 МэВ. Пришлось Окубо ввести нонет векторных мезонов в виде прямой суммы октета и синглета, который мы, предвосхищая события, запишем в виде

$$V_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\rho^0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\omega & \rho^+ & K^{*+} \\ \rho^- & \frac{1}{\sqrt{2}}\rho^0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\omega & K^{*0} \\ K^{*-} & \overline{K}^{*0} & \varphi \end{pmatrix}, \qquad (2.15)$$

$$\begin{pmatrix} \omega \\ \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_8 \\ \varphi_0 \end{pmatrix},$$

где $\sqrt{\frac{1}{3}}$ -суть cos $\theta_{\omega\varphi}$, $\theta_{\omega\varphi}$ - угол идеального смешивания октетного и синглетного состояний с I = 0, S = 0. Подчеркнем еще раз, что введение его было вызвано расхождением массовой формулы для векторных мезонов с экспериментом.

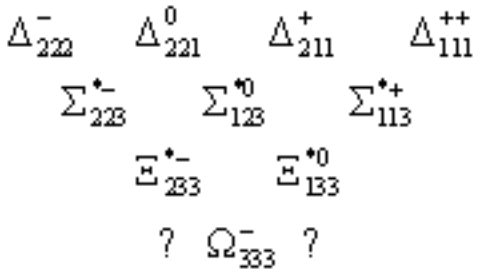
"В настоящее время (1969 г.) нет серьезных теоретических причин относиться к V_9 (к нонету-В. 3.) как к основной величине, никогда не выделяя из нее ω_0 (у нас φ_0 - В.3.) в виде SpV_9, так что замечание Окубо нужно рассматривать как забавное, но не очень глубокое наблюдение. (С. Газиорович,"Физика элементарных частиц", М., 1969).

Мы увидим несколько дальше, что наблюдение Окубо не только забавное, но и чрезвычайно глубокое.

2.1.4 Декуплет барионных резонансов с $J^P = 1/2^+$ и его массовые формулы

К 1963 году были уже установлены девять барионных резонансов с $J^P = 1/2^+$: изокварте т (с I = 3/2) $\Delta(1232) \to N + \pi$; изотриплет $\Sigma^*(1385) \to \Lambda + \pi$; изодублет $\Xi^*(1520) \to \Xi + \pi$. А в SU(3) как раз есть представление размерности 10, аналог НП размерности 4 в изопространстве SU(2) (с I = 3/2), который задается симметричным тензором 3-го ранга (что вкупе с симметричным тензором, описывающем спиновое состояние с $J^P = 3/2^+$ приводит к симметричной волновой функции для частицы с полуцелым спином!!!). Не достает состояния со

странностью -3, которое обозначим Ω^-. Вместе с ним декуплет запишется в виде:



Массовая часть лагранжиана для декуплета резонансов $B^{*\alpha\beta\gamma}$, следуя гипотезе Гелл-Манна об октетном характере нарушения унитарной симметрии лагранжиана, запишется просто:

$$L^{B^*}_{M^*} = M^*_0 \overline{B}^*_{\alpha\beta\gamma} B^{\alpha\beta\gamma} + M^*_1 \overline{B}^*_{3\beta\gamma} B^{3\beta\gamma}. \qquad (2.16)$$

Действительно, из унитарных волновых функций декуплета барионных резонансов $B^{*\alpha\beta\gamma}$ и соответствующего антидекуплета $\overline{B}_{*\alpha\beta\gamma}$, благодаря симметрии по индексам, октет можно построить единственным образом, свернув волновые функции по двум индексам из трех. В результате получим

$$M_\Delta = M^*_0, \quad M_{\Sigma^*} = M^*_0 + M^*_1, \quad M_{\Xi^*} = M^*_0 + 2M^*_1, \quad M_{\Omega^-} = M^*_0 + 3M^*_1. \qquad (2.17)$$

Такая формула для масс именуется эквидистантной. Она действительно выполняется с неплохой точностью, прочем шаг по массовой шкале составляет примерно 145 МэВ. Но тогда предсказываемое состояние со странностью -3 и массой (1530 + 145) = 1675 МэВ не может быть резонансом, поскольку самое легкое двухчастичное состояние со странностью -3 - это (Ξ(1320) K(490)) с массой 1810 МэВ! А значит, если оно существует, то должно быть частицей, стабильной по сильным взаимодействиям, и распадаться по слабому взаимодействию каскадным образом с потерей странности на единицу на каждом шаге.

Это предсказание целиком покоится на октетном характере нарушения, вводимого в массовый член лагранжиана, описывающего декуплет барионных резонансов $B^{*\alpha\beta\gamma}$.

Частица Ω^- была найдена в 1964 году, ее масса (1672,5 + 0,3) Мэв точно совпадала с предсказанием SU(3)!

Это был триумф унитарной симметрии. В нее поверило большинство физиков.

Содержание | Продолжение

2.2 Прачастицы и гипотеза кварков

Сравнивая изотопическую и унитарную симметрии частиц, можно заметить, что в случае изотопической симметрии среди мультиплетов часто реализуется низшее спинорное представление размерности 2 с базисом $(1\ 0)^T$, $(0\ 1)^T$- по этому представлению преобразуются, в частности, N, Ξ, K, Ξ^*, K*, а унитарные мультиплеты адронов начинаются с октета (аналогом ему в SU(2) служит изотриплет).

Возникет вопрос-реализуются ли в природе низшие спинорные представления SU(3) размерности 3? Другими словами, есть ли более элементарные сильновзаимодействующие частицы, чем обсуждаемые адроны?

Для большей наглядности вернемся в те времена, когда полагали, что π-мезоны представляют собой связанные состояния нуклонов и антинуклонов, и попытаемся понять, как такие состояния можно описать в изотопическом пространстве. Перемножим спиноры N^a, $\overline{N}_b$, a, b = 1, 2, а затем вычтем и прибавим шпур $\overline{N}_c N^c$, c = 1, 2, 3, разложив таким образом произведение неприводимых представлений (двух спиноров) на сумму неприводимых представлений:

$$\overline{N}_b \times N^a = \left(\overline{N}_b N^a - \delta^a_b \frac{1}{2}\overline{N}_c N^c\right) + \delta^a_b \frac{1}{2}\overline{N}_c N^c, \qquad (2.18)$$

что соответствует разложению $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = 1 + 0$ или через размерности представлений 2 x 2 = 3 + 1. В матричном виде

$$(\overline{p},\overline{n}) \times \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\overline{p}p - \overline{n}n)/2 & \overline{n}p \\ \overline{p}n & -(\overline{p}p - \overline{n}n)/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\overline{p}p + \overline{n}n)/2 & 0 \\ 0 & (\overline{p}p + \overline{n}n)/2) \end{pmatrix}, \qquad (2.19)$$

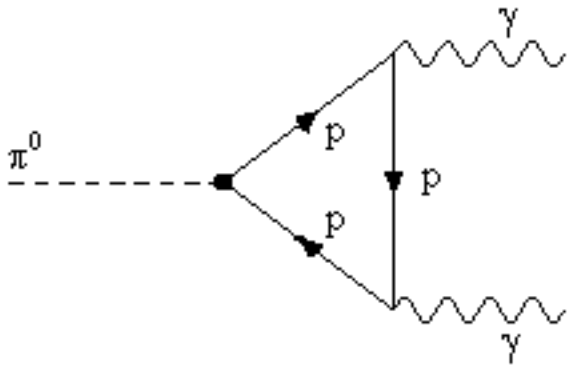
и мы отождествим для антипараллельных спинов нуклона и антинуклона с нулевым орбитальным моментом с изотриплетом пионов и изосинглетом η

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 & \pi^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\eta^0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\eta^0 \end{pmatrix}, \qquad (2.20)$$

а для параллельных спинов нуклона и антинуклона J = 1 с нулевым орбитальным моментом с изотриплетом ρ-мезонов и изосинглетом ω

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\rho^0 & \rho^+ \\ \rho^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\rho^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\omega^0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\omega^0 \end{pmatrix}. \qquad (2.21)$$

Эта гипотеза неоднократно с успехом использовалась. Например, по ней был рассчитан распад на два γ-кванта через нуклонную петлю,



Ответ в точности совпал с экспериментом, что само по себе было удивительно. Действительно, масса двух нуклонов настолько превышает массу π-мезона , что между нуклонами должна быть чудовищная энергия связи. В то же время ответ получен в предположении, что нуклоны практически свободны. (1949 г., одно из достижений фейнмановской диаграммной техники в приложении к распадам адронов.)

С открытием гиперонов число фундаментальных барионов резко возросло. В связи с этим возникли и первые модели составных частиц (мы отвлекаемся здесь от действительно первых моделе составных частиц, восходящих к Демокриту и изложенных Титом Каром в его бессмертной поэме "О природе вещей"). Особенно близкой к модели унитарной симметрии была модель Сакаты, навеянная, по его собственным словам, "Диалектикой природы" Энгельса. В основе его модели лежали протон, нейтрон и Λ - гиперон в качестве фундаментального триплета. Но октет известных барионов в такой модели не получается. Идея поместить что-то в триплет, тем не менее, остается очень привлекательной.

Содержание | Продолжение

2.3 Кварковая модель. Мезоны в кварковой модели

А потом, при совершенно безнадежном положении дел, пытаются найти запоздалое средство помощи в превратной и суетной тонкости рассуждений, но это нисколько не улучшает положения и не устраняет заблуждений".

Фрэнсис Бэкон

Совершенно революционной явилась модель кварков. Гелл-Манн и Цвейг в 1964 предположили, что существуют некоторые прачастицы, преобразующиеся по спинорному представлению размерности 3 группы SU(3) (и, соответственно, антипрачастицы, преобразующиеся по сопряженному спинорному представлению той же размерности), а из них, в свою очередь, построены все остальные адроны. Они должны быть фермионами (иначе не образовать реальных фермионов), и пусть это будут фермионы с $J^P = 1/2^+$ q^α, $\alpha = 1, 2, 3$, $q^1 = u$, $q^2 = d$, $q^3 = s$. Отметим, что из-за того, что для построения бариона со спином 1/2 необходимы по крайней мере три кварка со спином 1/2 , электрический, а также барионный заряды у кварков оказываются дробными, что 40 лет назад представлялось откровенно нереальным, а для многих - даже неприемлимым.

Квантовые числа кварков при этом должны были быть следующими:

	Q	I	I_3	Y=S+B	B
u	2/3	S	1/3	1/3	1/3
d	-1/3	S	-1/2	1/3	1/3
s	-1/3	0	0	-2/3	1/3

чтобы обеспечить правильные квантовые числа всех 8 известных барионов (2.1): p(uud), n(ddu), Σ^+(uus), Σ^0(uds), Σ^-(dds), Λ (uds), Ξ^-(ssu), Ξ^0(ssd). Подробнее вопрос о барионах мы обсудим, по соображениям непрерывности изложения, несколько позже в отдельной главе.

Сначала мы рассмотрим мезонные состояния. Из кварка и антикварка можно попытаться образовать мезонные состояния в полной аналогии с предыдущими рассуждениями о нуклон-антинуклонных состояниях и формулами (2.18, 2.19):

$$\bar{q}_\beta \times q^\alpha = \left(\bar{q}_\beta q^\alpha - \frac{1}{3}\delta^\alpha_\beta \bar{q}_\gamma q^\gamma\right) + \frac{1}{3}\delta^\alpha_\beta \bar{q}_\gamma q^\gamma,$$

$$(\bar{u},\bar{d},\bar{s})\times\begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}u & \bar{d}u & \bar{s}u \\ \bar{u}d & \bar{d}d & \bar{s}d \\ \bar{u}s & \bar{d}s & \bar{s}s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 & \bar{d}u & \bar{s}u \\ \bar{u}d & D_2 & \bar{s}d \\ \bar{u}s & \bar{d}s & D_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\left(\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s\right)\mathbb{I}, \qquad (2.22)$$

где

$$D_1 = \bar{u}u - \frac{1}{3}\bar{q}q = \frac{1}{2}\left(\bar{u}u - \bar{d}d\right) + \frac{1}{6}\left(\bar{u}u + \bar{d}d - 2\bar{s}s\right) = \frac{1}{2}\bar{q}\lambda_3 q + \frac{1}{2\sqrt{3}}\bar{q}\lambda_8 q,$$

$$D_2 = \bar{d}d - \frac{1}{3}\bar{q}q = \frac{1}{2}\left(\bar{u}u - \bar{d}d\right) + \frac{1}{6}\left(\bar{u}u + \bar{d}d - 2\bar{s}s\right) = -\frac{1}{2}\bar{q}\lambda_3 q + \frac{1}{2\sqrt{3}}\bar{q}\lambda_8 q,$$

$$D_3 = \bar{s}s - \frac{1}{3}\bar{q}q = -\frac{2}{6}\left(\bar{u}u + \bar{d}d - 2\bar{s}s\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{q}\lambda_8 q.$$

Мы видим, что полученную бесследную матрицу можно отождествить с октетом мезонов $J^P = 0^-$ (S-состояние), при этом кварковое содержание мезонов оказывается следующим:

$$\pi^- = (\bar{u}d),\ \pi^+ = (u\bar{d}),\ \pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}),\ K^- = (\bar{u}s),\ K^+ = (\bar{s}u),\ K^0 = (\bar{d}s),\ \bar{K}^0 = (s\bar{d}),$$

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\bar{u}u + \bar{d}d - 2\bar{s}s\right).$$

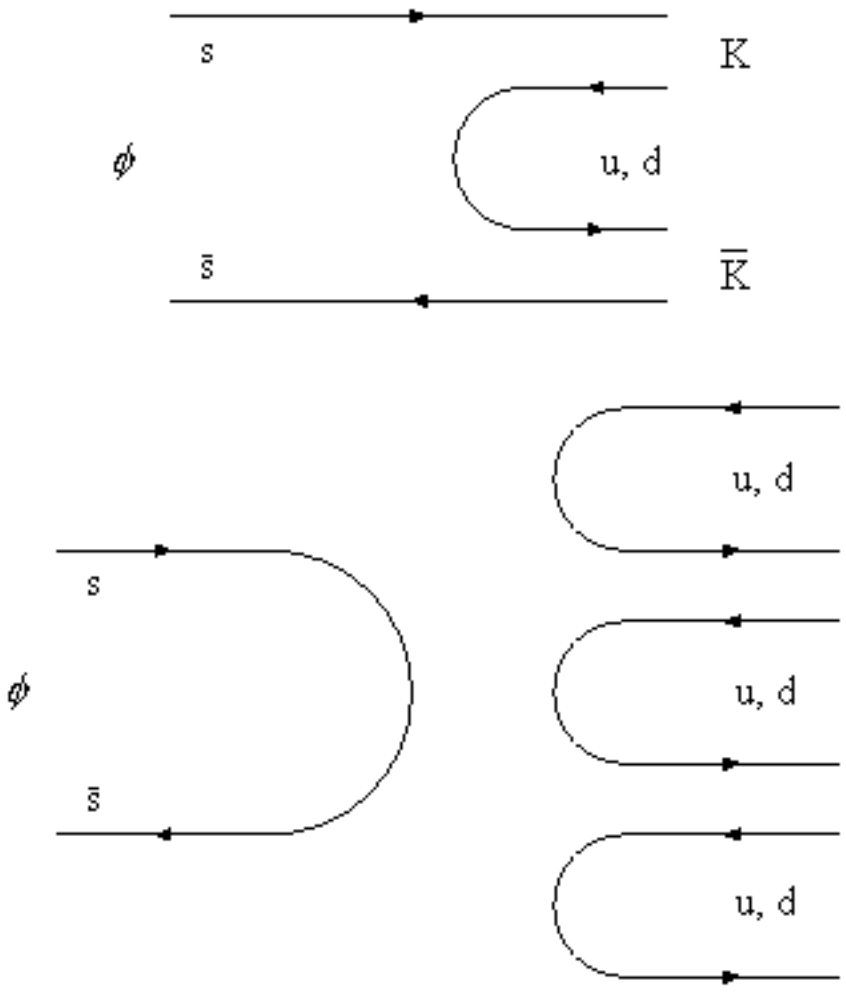
Аналогично строится и нонет векторных мезонов (2.26). При этом, поскольку их 9, то и возьмем непосредственно первое выражение в (2.22) с полным моментом J = 1:

$$\left(\bar{u},\bar{d},\bar{s}\right)_{\uparrow}\times\begin{pmatrix}u\\d\\s\end{pmatrix}_{\uparrow}=\begin{pmatrix}\bar{u}_{\uparrow}u_{\uparrow} & \bar{d}_{\uparrow}u_{\uparrow} & \bar{s}_{\uparrow}u_{\uparrow}\\ \bar{u}_{\uparrow}d_{\uparrow} & \bar{d}_{\uparrow}d_{\uparrow} & \bar{s}_{\uparrow}d_{\uparrow}\\ \bar{u}_{\uparrow}s_{\uparrow} & \bar{d}_{\uparrow}s_{\uparrow} & \bar{s}_{\uparrow}s_{\uparrow}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\rho^{0}+\frac{1}{\sqrt{2}}\omega & \rho^{+} & K^{*+}\\ \rho^{-} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\rho^{0}+\frac{1}{\sqrt{2}}\omega & K^{*+}\\ K^{*-} & \overline{K}^{*0} & \varphi\end{pmatrix}_{\uparrow} \qquad 2.23$$

Тогда сразу видно особенное строение φ-мезона - он состоит только из странных кварков!!!

Сразу стало возможным объяснить более чем странный характер его каналов распада.

Действительно, в отличие от ω-мезона с основной модой распада на 3 пиона, φ-мезон практически не распадается по этому каналу, $(2.5 \pm 09)\%$, хотя энергетически он очень выгоден, и, напротив, охотно распадается на пару каон-антикаон: $(49.1 \pm 0{,}9)\%$ на пару $K^{+}K^{-}$ и $(34.3 \pm 0{,}7)\%$ на пару $K_{L}^{0}K_{s}^{0}$. Этот экспериментальный факт сразу становится понятным, если мы построим кварковые диаграммы на простейшем уровне:



Вот мы и убедились, что замечание Окубо не только забавное, но и глубокое.

Итак, вроде бы экспериментальные данные по мезонам указывают на то, что существует три кварка.

А можно ли оценить эффективные массы кварков? Предоположим, что ϕ-мезон состоит точно из двух странных кварков, так что $m_s = M(\phi(1020))/2 \equiv$ 510 МэВ. Эффективную массу двух легких кварков оценим из массы нуклона как $m_u = m_d = M(p) \equiv$ 310 МэВ. Эти массы называются конституэнтными. Посмотрим, как работает такая схема для масс октета.

$$M(p)_{(uu,d)} = M(n)_{(dd,u)} = 930 \text{ МэВ } (\sim 940) \text{ экс.}$$
$$M(\Sigma)_{(qq,s)} = 1130 \text{ МэВ } (\sim 1192) \text{ экс.}$$
$$M(\Lambda)_{(uds)} = 1130 \text{ МэВ } (\sim 1115) \text{ экс.}$$
$$M(\Xi)_{(ss,q)} = 1330 \text{ МэВ } (\sim 1320) \text{ экс.}$$

(Есть еще один радикальный вопрос: А существуют ли кварки реально? С самого начала этот вопрос был предметом оживленных дискуссий и экспериментальных поисков. Сам Гелл-Манн вначале склонялся к мысли, что это только некоторые удобные для физики частиц математические объекты. В настоящее время полагают, что кварки не менее реальны остальных элементарных частиц. Подробнее мы на этом остановимся в следующих главах.)

Содержание | Продолжение

2.4 Шарм и его появление в физике частиц. Бьюти. Топ

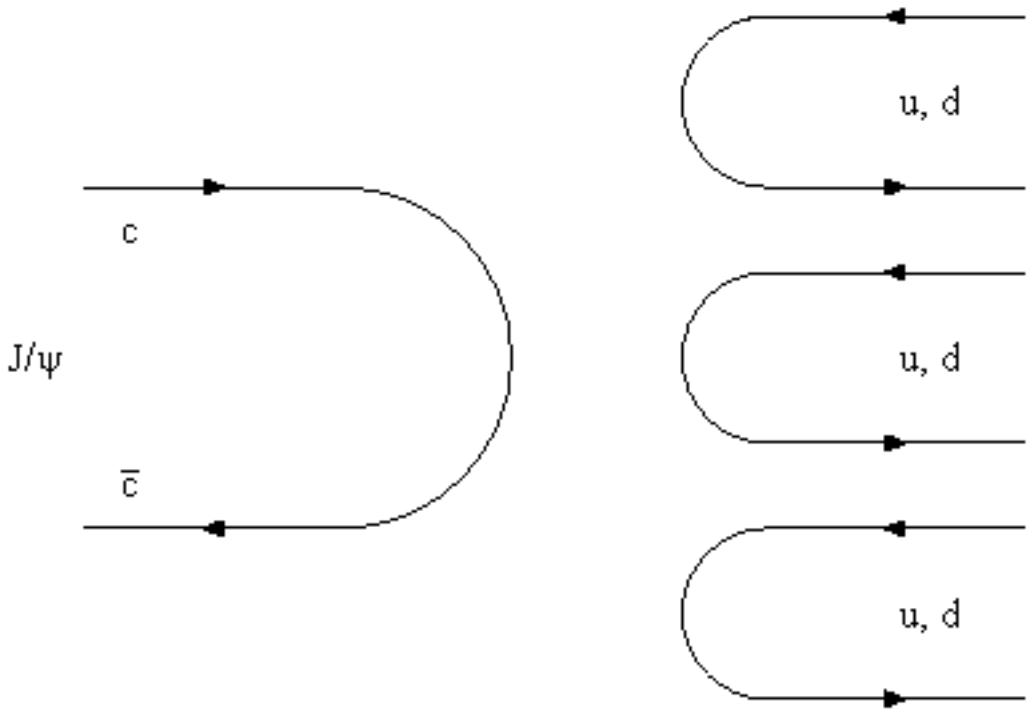
"Till Parisina's fatal
charms
Again attracted every
eye..."

Lord Byron,
'Parisina'

Итак, существует три кварка!

В течение 10 лет именно так и полагали, но затем случилось неожиданное.

В ноябре 1974 на Брукхевенском ускорителе протонов на 28 ГэВ(США) и на встречных кольцах SPEAR (SLAC,США) была открыта J/ψ-частица-векторный мезон, распадающийся по адронному каналу на пионы, с неожиданно большой массой 3100 МэВ и неожиданно большим временем жизни и соответственно малой шириной, примерно 100 Кэв, тогда как для адронов характерные ширины колебались от 150 Мэв для ρ-мезона до 8 Мэв для ω и 4 Мэв для φ-мезонов. Проведя аналогию с подавлением распада на пионы векторного φ-мезона, который, как полагают , в основном является состоянием ($s\bar{s}$) сделали вывод, что самым простым решением является гипотеза о существовании 4-го кварка с новым квантовым числом "charm". Тогда J/ψ(3100) будет состоянием ($\bar{c}c$).

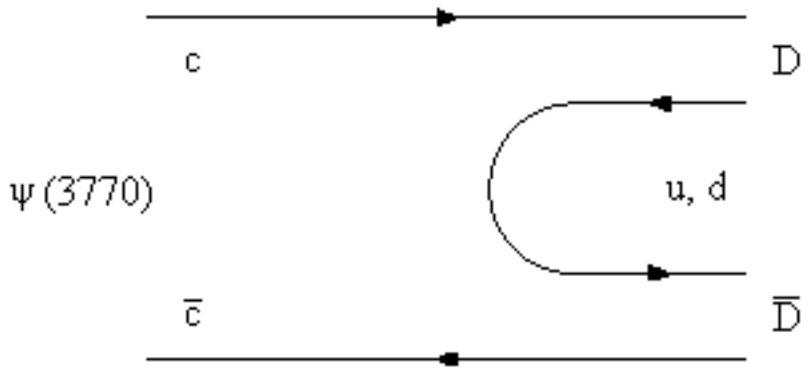


А как быть с массой шармового кварка? Сделаем смелое предположение, что как и в случае с φ(1020)-мезона, когда масса мезона равна удвоенной массе странного кварка (500 МэВ), масса очарованного кварка составляет половину массы J/ψ(3100)-частицы, т.е. 1500 МэВ, более чем в полтора раза превышая массу протона.

Но тем самым было предсказано существование мезонов с шармом с кварковым содержанием ($\bar{u}c$), ($\bar{c}u$), ($\bar{d}c$), ($\bar{c}d$) , а также ($\bar{s}c$) и ($\bar{c}s$). Поскольку шарм в сильных взаимодействиях должен сохраняться так же, как сохраняется странность, они должны распадаться по слабому взаимодействию с потерей шарма. Для простоты предположим, что массы этих мезонов просто складываются из масс соответствующих кварков.

Еще раз используем аналогию с φ(1020)-мезоном, основным каналом распада которого является распад на каон(490)-антикаон(490), и рождение которого с последующим распадом по этому каналу является доминирующим процессом при энергии электрон-позитронных колец 1020 МэВ.

Если существует аналог J/ψ(3100)-частицы с большей массой, а именно, в районе 2 x (1500 +300) МэВ, то такой мезон должен охотно распадаться на шармовые мезоны. Но такой мезон действительно был обнаружен, это векторная ψ(3770)-частица, основным каналом ее распада является распад на два шармовых мезона, причем ширина распада составляет более 20 МэВ !!!



Обнаруженные шармовые мезоны распадаются, как и ожидалось, по слабому взаимодействию, что видно уже по характерному для слабых взаимодействий времени их жизни на уровне 10^{-12}-10^{-13} сек.

Группа унитарной симметрии, по которой следует теперь проводить классификацию частиц, возрастает до группы SU(4). Правда, использовать ее аналогично группе SU(3) для построения массовых формул и т.п. навряд ли возможно из-за слишком больших разниц масс между частицами, соразмерных уже с самими величинами масс частиц. Во всяком случае этот вопрос требует специальных исследований.

В модели с 4 кварками мезоны будут преобразовываться по представлениям группы SU(4), содержащимся в разложении прямого произведения 4 на $\bar{4}$ $\bar{4} \times 4 = 15 + 1$ или

$$\bar{q}_\beta \times q^\alpha = \left(\bar{q}_\beta q^\alpha - \frac{1}{4} \delta^\alpha_\beta \bar{q}_\gamma q^\gamma \right), \tag{2.24}$$

где теперь

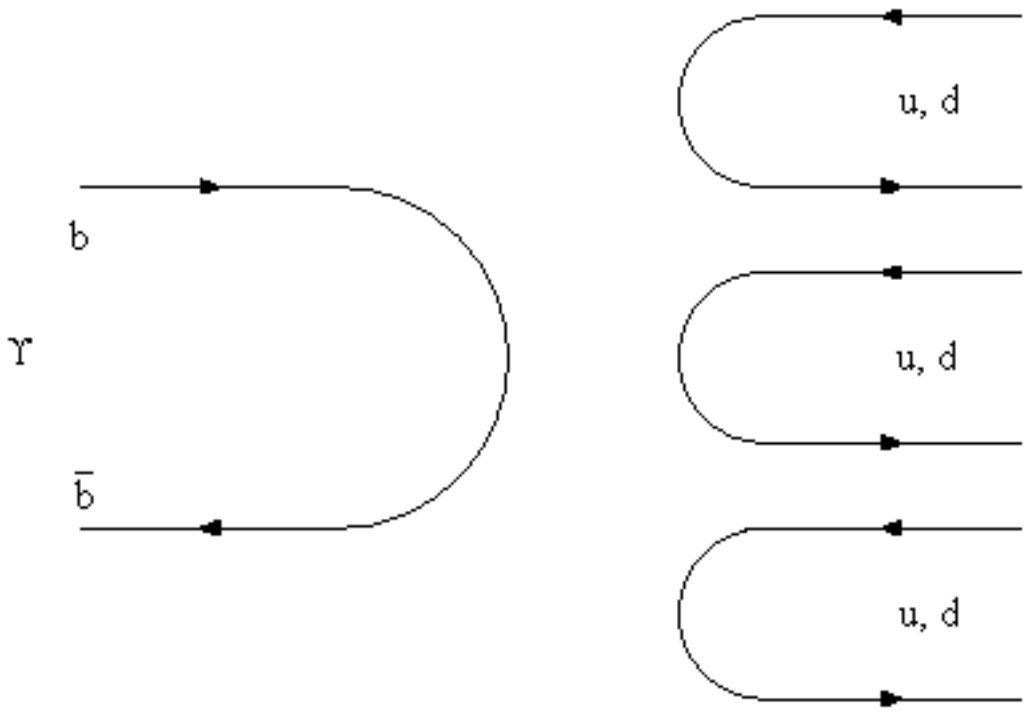
$$P^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} \eta_c(2980) & D^0(1865) & D^+(1870) & F^+(1969) \\ D^0(1865) & \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta & \pi^+ & K^+ \\ D^-(1870) & \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta & K^0 \\ F^-(1969) & K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2\eta}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

$$V_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} \psi(3100) & D^{*0}(2007) & D^{*+}(2010) & F^{*+}(2112) \\ D^{*0}(2007) & \frac{1}{\sqrt{2}}\rho^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\omega & \rho^+ & K^+ \\ D^{*-}(2010) & \rho^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\rho^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\omega & K^{*0} \\ F^{*-}(2112) & K^{-*} & \overline{K}^{*0} & \varphi \end{pmatrix} \qquad (2.26)$$

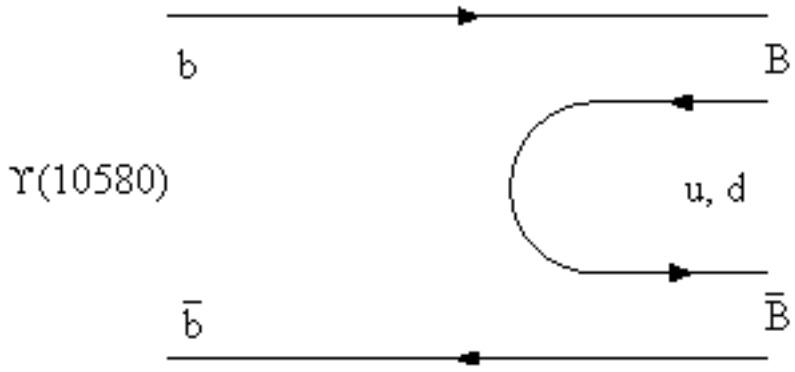
Пятый кварк. Бьюти

Per la bellezza di una donna molti sono periti...Eccl.

Простота человеческого мышления стала яснее при следующем крупном открытии- когда в 1977 был открыт узкий векторный резонанс с массой около 10 ГэВ, $\Upsilon(1S)(9460)$, $\Gamma \approx 50$ кэВ, все единодушно решили, что тут и думать не о чем - это состояние с новым 5-ым кварком типа $(\overline{s}s)$ или J/ψ. И назвали этот кварк b от beauty или bottom и приписали ему массу 5 ГэВ $\approx M(\Upsilon)/2$, половину массы нового мезона со скрытой "beauty" $\Upsilon(1S)(9460) = (\overline{b}\,b)$.



И тут же стали искать следующее его возбужденное состояние, которое, подобно $\Psi(3770)$, имело бы заметно большую ширину и разваливалось бы тут же на мезоны с квантовым числом "beauty". Нашли . Это $\Upsilon(4S)(10580)$, $\Gamma \approx 10$ МэВ. Он почти нацело распадается на пару $\overline{B}B$, где псевдоскалярные(?) мезоны B имеют массу ~5300 = (5000 + 300) МэВ и время жизни порядка полутора наносекунд.



2.5 Truth или top?

Truth is not to be sought in the good fortune of any particular conjuncture of time, which is uncertain, but in the light of nature and experience which is eternal.

Francis Bacon

Но это было не все, поскольку к этому времени в наличии уже было шесть лептонов e^-, ν_e, μ^-, ν_μ, τ^-, ν_τ (и шесть антилептонов) и только 5 кварков: c,u с зарядом +2/3e и d,s,b с зарядом -1/3e. Оставляя в стороне теоретические основания (а они были, и серьезные), мы видим, что нарушена симметрия между кварками и лептонами и между числом кварков разного заряда. Не означает ли это, что существует 6-й кварк с квантовым числом "truth" или "top"? В течение 20 лет это принималось почти всеми на веру, хотя было много попыток придумать модели, где бы вовсе не было 6-го кварка. Только в 1996 году t-кварк был открыт с массой близкой к массе ядра лютеция $^{71}Lu^{175}$, $m_t \approx 175$ ГэВ. Пока мало можно сказать о частицах, содержащих t-кварк.

Содержание | Продолжение

2.6 Барионы в кварковой модели

До этих пор мы сравнительно подробно рассматривали мезонные состояния как в рамках унитарной симметрии, так и в рамках кварковых моделей. Теперь мы вернемся к унитарной симметрии SU(3) и ктрехкварковой модели с кварками u,d,s и построим в этой модели барионы. Для образования барионов требуется минимум три кварка, поэтому трижды перемножим низшее спинорное представление 3 само на себя и поищем в разложении неприводимое представление размерности 8: 3x3x3 = 10 + 8 + 8' + 1. Как видно, 8 входит даже дважды, и можно смело продолжать построение октета барионов из кварков. Разложить произведение трех спиноров на сумму неприводимых представлений сложнее, чем то, что мы делали в случае мезонов. Аккуратно симметризуя и антисимметризуя по всем индексам, построим искомое разложение:

$$
\begin{aligned}
&q^{\alpha}\times q^{\beta}\times q^{\gamma}=\frac{1}{4}\left(q^{\alpha}q^{\beta}q^{\gamma}+q^{\beta}q^{\alpha}q^{\gamma}+q^{\alpha}q^{\gamma}q^{\beta}+q^{\beta}q^{\gamma}q^{\alpha}+q^{\gamma}q^{\beta}q^{\alpha}+q^{\gamma}q^{\alpha}q^{\beta}\right)+\\
&\frac{1}{4}\left(q^{\alpha}q^{\beta}q^{\gamma}-q^{\beta}q^{\alpha}q^{\gamma}+q^{\alpha}q^{\gamma}q^{\beta}-q^{\beta}q^{\gamma}q^{\alpha}+q^{\gamma}q^{\beta}q^{\alpha}-q^{\gamma}q^{\alpha}q^{\beta}\right)+\\
&\frac{1}{4}\left(q^{\alpha}q^{\beta}q^{\gamma}+q^{\beta}q^{\alpha}q^{\gamma}-q^{\alpha}q^{\gamma}q^{\beta}+q^{\beta}q^{\gamma}q^{\alpha}-q^{\gamma}q^{\beta}q^{\alpha}+q^{\gamma}q^{\alpha}q^{\beta}\right)+\\
&\frac{1}{4}\left(q^{\alpha}q^{\beta}q^{\gamma}-q^{\beta}q^{\alpha}q^{\gamma}-q^{\alpha}q^{\gamma}q^{\beta}+q^{\beta}q^{\gamma}q^{\alpha}+q^{\gamma}q^{\beta}q^{\alpha}-q^{\gamma}q^{\alpha}q^{\beta}\right)=T^{\{\alpha\beta\gamma\}}+T^{[\alpha\beta]\gamma}+T^{[\alpha\gamma]\beta}+T^{[\alpha\beta\gamma]}
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

Здесь все индексы пробегают значения от 1 до 3. Тензоры со смешанной симметрией размерности 8 можно перевести в тензоры более привычного вида T^{α}_{β}, использовав абсолютно антисимметричный тензор 3-го ранга.

Симметричный тензор 3-го ранга имеет размерность $N_n^{SSS} = n(n^2 + 3n +2)/6$ и для n = 3 $N_3^{SSS} = 10$. Антисимметричный тензор 3-го ранга имеет размерность $N_n^{AAA} = n(n^2 - 3n + 2)/6$ и для n = 3 $N_3^{AAA} = 1$. Тензоры со смешанной симметрией размерности $N_n^{mix} = n(n^2 -1)/3$ только для n = 3 ($N_3^{mix} = 8$) можно переписать в более удобной форме как бесшпуровый тензор T^{α}_{β}, используя абсолютно антисимметричный тензор 3-го ранга $\varepsilon_{\beta\delta\eta}$, являющийся синглетом по группе SU(3). Действительно,

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_{\alpha'\beta'\gamma'}=u^{\alpha}_{\alpha'}u^{\beta}_{\beta'}u^{\gamma}_{\gamma'}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}:\\
&\varepsilon_{123}=u^{1}_{1}u^{2}_{2}u^{3}_{3}\varepsilon_{123}+u^{2}_{1}u^{3}_{2}u^{1}_{3}\varepsilon_{231}+u^{3}_{1}u^{1}_{2}u^{2}_{3}\varepsilon_{312}-\\
&-u^{1}_{1}u^{3}_{2}u^{2}_{3}\varepsilon_{132}-u^{3}_{1}u^{2}_{2}u^{1}_{3}\varepsilon_{132}-u^{2}_{1}u^{1}_{2}u^{3}_{3}\varepsilon_{132}=\mathrm{Det}\ U\varepsilon_{123}=\varepsilon_{123},
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

так как Det U =1. (Аналогично для ε_{213} etc.)

Например, частично асимметричный 8-мерный тензор $T^{[\alpha\beta]\gamma}$ можно переписать как

$$
B^{\beta}_{\alpha}\Big|^{As}_{SU(3)}=\varepsilon_{\alpha\gamma\eta}T^{[\gamma\eta]\beta},
$$

тогда, к примеру, для протона p = B^{1}_{3} получим

$$
\sqrt{2}\left|p\right\rangle^{As}_{SU(3)}=\sqrt{2}B^{1}_{3}\Big|^{As}_{SU(3)}=-\left|udu\right\rangle+\left|duu\right\rangle.
\tag{2.29}
$$

А октет барионов на основе частично симметричного 8-мерного тензора $T^{\{\alpha\beta\}\gamma}$ можно представить через кварковые волновые функции как

$$\sqrt{6}B^{\alpha}_{\beta}\Big|^{Sy}_{SU(3)} = \varepsilon_{\beta\delta\eta}(q^{\alpha}, q^{\delta})q^{\eta}.$$

Для протона B^1_3 имеем

$$\sqrt{6}\,|p\rangle^{Sy}_{SU(3)} = \sqrt{6}B^1_3\Big|^{Sy}_{SU(3)} = 2|uud\rangle - |udu\rangle - |duu\rangle. \qquad (2.30)$$

Для того, чтобы построить полностью симметричную волновую функцию по спину и унитарному спину через кварковые волновые функции определенного аромата и определенной проекцией спина, следует построить волновую функцию, симметричную относительно всех возможных перестановок ароматов и проекций спина кварков данного бариона. (Что до антисимметрии волновой функции бариона в целом, это мы возложим на цветные степени свободы.)

Перемножив спиновые волновые функции (1.42, 1.44) волновые функции по унитарному спину (или ароматовые волновые функции) (2.29, 2.30) получаем:

$$\sqrt{18}B^{\alpha}_{\beta}\Big|_{\uparrow} = \sqrt{18}\left(B^{\alpha}_{\beta}\Big|^{As}_{SU(3)} \cdot t^{j}_{A} + B^{\alpha}_{\beta}\Big|^{Sy}_{SU(3)} \cdot T^{j}_{S}\right). \qquad (2.31)$$

Взяв опять в качестве примера протон B^1_3, имеем

$$\begin{aligned}
&\sqrt{18}|p\rangle_{\uparrow} = |-uud+uud\rangle\cdot|-\uparrow\downarrow\uparrow+\uparrow\uparrow\downarrow\rangle+\\
&+|2\cdot uud-udu-duu\rangle\cdot|2\uparrow\uparrow\downarrow-\uparrow\downarrow\uparrow-\downarrow\uparrow\uparrow\rangle= \qquad (2.32)\\
&=|2u_{\uparrow}u_{\uparrow}d_{\downarrow}-u_{\uparrow}d_{\uparrow}u_{\downarrow}-d_{\uparrow}u_{\uparrow}u_{\downarrow}+2u_{\uparrow}d_{\downarrow}u_{\uparrow}-u_{\uparrow}u_{\downarrow}d_{\uparrow}-d_{\uparrow}u_{\downarrow}u_{\uparrow}+2d_{\downarrow}u_{\uparrow}u_{\uparrow}-u_{\downarrow}u_{\uparrow}d_{\uparrow}-u_{\downarrow}d_{\uparrow}u_{\uparrow}\rangle.
\end{aligned}$$

Использованы обозначения

$$|uud\rangle\cdot|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle = |u_{\downarrow}u_{\uparrow}d_{\uparrow}\rangle$$

и т.д.

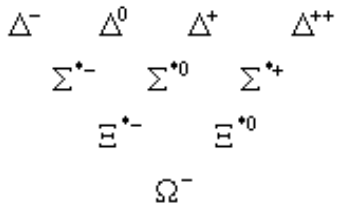
Важное замечание. Можно уверенно использовать вместо (2.31) более короткую формулу, но при условии, что уже нельзя переставлять ни ароматы, ни проекции спинов кварков!

$$\sqrt{6}\,|p\rangle = \sqrt{6}\left|B^1_3\right\rangle_{\uparrow} = |2u_{\uparrow}u_{\uparrow}d_{\downarrow}-u_{\uparrow}d_{\uparrow}u_{\downarrow}-d_{\uparrow}u_{\uparrow}u_{\downarrow}\rangle. \qquad (2.33)$$

Волновая функция изосинглета Λ имеет другую структуру, что легко видеть из расчетов

$$2|\Lambda\rangle_{\uparrow} = -\sqrt{6}\left|B^3_3\right\rangle_{\uparrow} = |d_{\uparrow}s_{\uparrow}u_{\downarrow}+s_{\uparrow}d_{\uparrow}u_{\downarrow}-u_{\uparrow}s_{\uparrow}d_{\downarrow}-s_{\uparrow}u_{\uparrow}d_{\downarrow}\rangle. \qquad (2.34)$$

Декуплет барионных резонансов $T^{\{\alpha\beta\gamma\}}$ с $J^P = 3/2^+$ который мы запишем в виде так называемой весовой диаграммы (графическое представление базиса представления группы SU(3) в плоскости двух параметров, характеризующих элементы базиса, в нашем случае- 3-й проекции изотопического спина I_3 по оси абсцисс и гиперзаряда Y по оси ординат), которая для декуплета имеет вид треугольника:



имеет, таким образом, следующее кварковое содержание:

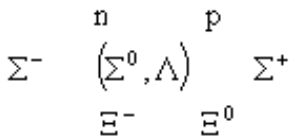
ddd udd uud uuu

sdd sud suu

ssd ssu

sss

В группе SU(3) весовые диаграммы всех представлений имеют вид шестиугольников или треугольников и часто удобны в приложениях. Для октета весовая диаграмма имеет вид шестиугольника, причем в центре содержится элемент кратности 2:



или через кварковое содержание барионов:

udd uud

sdd sud suu

ssd ssu

С открытием шарма встал вопрос о поиске шармовых барионов. Они были вскоре открыты. Сейчас уже известны Λ_c^+(2285.1±0.6МэВ), Λ_c^+(2625.6±0.8МэВ), $\Sigma_c^{++,+,0}$(2455), $\Xi_c^{+,0}$(2465). Попробуем их расклассифицировать по представлениям групп SU(4) и SU(3) . Перемножим трижды спиноры q^α, α = 1, 2, 3, 4 размерности 4. Тензорная запись совпадает с приведенной выше для группы SU(3) . Но размерности представлений, конечно, другие: 4 x 4 x 4 = 20' + 20 + 20 + $\overline{4}$. Симметричный тензор 3-го ранга размерности N_n^{SSS} = n(n^2 + 3n +2)/6 в SU(4) имеет размерность 20 и обычно обозначается как 20'$_4$. Редукция 20'$_4$ по представлениям группы SU(3) имеет вид 20'$_4$ = 10$_3$ + 6$_3$ + 3$_3$ + 1$_3$.

Довольно просто получить такого рода разложения через размерности соответствующих представлений. Действительно, почти очевидно, что 4-спинор SU(4) редуцируется в сумму НП SU(3) как 4$_4$ = 3$_3$ + 1$_3$. Таким образом, произведение (1.34) при n = 4 4$_4$ x 4$_4$ = 10$_4$ + 6$_4$ сведется к

$$(3_3 + 1_3) \times (3_3 + 1_3) = 3_3 \times 3_3 + 3\_3 \times 1_3 + 1_3 \times 3_3 + 1_3 \times 1_3 =$$
$$= 6_3 + \bar{3}_3 + 3_3 + 3_3 + 1_1.$$

Антисимметричный тензор 2-го ранга $T^{[\alpha\beta]}$ размерности N_n^{AA} =n(n-1)/2, равной 6 при n = 4 и обозначенный нами как 6_4, должен быть равен своему сопряженному $T_{[\alpha\beta]}$ благодаря наличию абсолютно антисимметричного тензора $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и, таким образом, имеет следующее разложение по SU(3): $6_4 = 3_3 + \bar{3}_3$. Оставшийся симметричный тензор 2-го ранга $T^{\{\alpha\beta\}}$ размерности N_n^{SS} = n(n + 1)/2, равной 10 при n = 4 и обозначенный нами как 10_4, будет иметь разложение по SU(3) $10_4 = 6_3 + 3_3 + 1_3$. Следующим шагом будет построение разложения по SU(3) произведений $6_4 \times 4_4 = 20'_4 + \bar{4}_4$ (см. (1.41) при n = 4) и $10_4 \times 4_4 = 20'_4 + 20_4$. Их сумма даст нам ответ для произведения трех спиноров 4 x 4 x 4.

$$6_4 \times 4_4 = (3_3 + \bar{3}_3) \times (3_3 + 1_3) = \bar{4}_4 + 20'_4 =$$
$$= 3_3 \times 3_3 + \bar{3}_3 \times 3_3 + 3_3 + \bar{3}_3 =$$
$$= (\bar{3}_3 + 1_3) + (8_3 + 6_3 + \bar{3}_3 + 3_3.)$$

Поскольку разложение $20'_4$ уже известно, легко получить разложение 20_4:

$$20_4 = 10_4 \times 4_4 - 20'_4 = 10_3 + 6_3 + 3_3 + 1_3.$$

Тензорное счисление с $q^\alpha = \delta_a^\alpha q^a + \delta_4^\alpha q^4$ приводит к тем же результатам.

Итак, в 20_4-плет составной частью входят 10 барионных резонансов. Что касается шармовых барионов $3/2^+$, то пока есть только два кандидата: $\Sigma_c(2520)$ и $\Xi_c(2645)$ (но J^P не измерено; значение $3/2^+$ - это предсказание кварковой модели). Отметим между прочим, что значение J^P гиперона Ω^-, открытого в 1964 г. и явившегося триумфальным подтверждением SU(3), не измерено до сих пор, т.е. в течение более 40 лет! Тем не менее все уверенно полагают, что его спин-четность есть $3/2^+$.

А барионы $1/2^+$ входят в 20-плет, описываемый тензором 3-го ранга $B^\alpha_{[\gamma\beta]}$ антисимметричном по двум индексам в квадратных скобках:

$$\sqrt{6}B^\alpha_{[\gamma\beta]} = \varepsilon_{\gamma\beta\delta\eta}\{q^\alpha, q^\delta\}q^\eta$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta$ = 1, 2, 3, 4. Этот $20'_4$-плет редуцируется по представлениям группы SU(3) как $20'_4 = 8_3 + 6_3 + 3_3 + \bar{3}_3$. Удобно выбрать редукцию по -мультиплетам с одираковым значением шарма. В 8-плет с C = 0 естественно поместить обычный октет барионов из кварков u,d,s (2.1).

В триплет входят неоткрытые еще барионы с C = 2

$$\Xi_{cc}^+ \qquad \Xi_{cc}^{++}$$
$$\Omega_{cc}^+$$

с кварковым содержанием

ccd ccu

ccs

Например, волновая функция Ξ_{cc}^+ запишется как

$$\sqrt{6}\left|\Xi_{cc}^{+}\right\rangle=\left|2c_{\uparrow}c_{\uparrow}u_{\downarrow}-c_{\uparrow}u_{\uparrow}c_{\downarrow}-u_{\uparrow}c_{\uparrow}c_{\downarrow}\right\rangle. \tag{2.35}$$

В антитриплет входят открытые уже барионы с C = 1

$$\Lambda_c^+$$

$$\Xi_c^0 \qquad \Xi_c^+$$

с кварковым содержанием

udc

dsc usc

и, например волновая функция Ξ_c^+ записывается как

$$\sqrt{6}\left|\Xi_{c}^{+}\right\rangle=\left|s_{\uparrow}c_{\uparrow}u_{\downarrow}+c_{\uparrow}s_{\uparrow}u_{\downarrow}-u_{\uparrow}c_{\uparrow}s_{\downarrow}-c_{\uparrow}u_{\uparrow}s_{\downarrow}\right\rangle. \tag{2.36}$$

В шестиплет входят частично открытые барионы с C = 1

$$\Sigma_c^0 \qquad \Sigma_c^+ \qquad \Sigma_c^{++}$$

$$\Xi_c'^0 \qquad \Xi_c'^+$$

$$\Omega_c^0$$

(из них на опыте известен только верхний изотриплет) с кварковым содержанием

ddc udc uuc

dsc usc

ssc

и, например волновая функция $\Xi_c'^+$ записывается как

$$\sqrt{6}\left|\Xi_{c}'^{+}\right\rangle=\left|2u_{\uparrow}s_{\uparrow}c_{\downarrow}+c_{\uparrow}u_{\uparrow}u_{\downarrow}-u_{\uparrow}c_{\uparrow}s_{\downarrow}-c_{\uparrow}u_{\uparrow}s_{\downarrow}-s_{\uparrow}c_{\uparrow}u_{\downarrow}-c_{\uparrow}s_{\uparrow}u_{\downarrow}\right\rangle. \tag{2.37}$$

Обратим внимание на то, что в группе SU(4) по синглетному представлению преобразуется абсолютно антисимметричный тензор 4-го ранга $\varepsilon_{\gamma\beta\delta\eta}, \alpha,\beta,\delta,\eta$, поэтому антисимметричный тензор 3-го ранга в SU(4) $T^{[\alpha\beta\gamma]}, \alpha, \beta, \gamma$ = 1, 2, 3, 4 преобразуется не по скалярному представлению как в SU(3) (что доказывается в SU(3) сверткой с тензором $\varepsilon_{\beta\delta\eta}, \beta\delta\eta$ = 1, 2, 3, а по сопряженному спинорному представлению $\overline{4}$ (что опять-таки доказывается сверткой с тензором $\varepsilon_{\gamma\beta\delta\eta}, \alpha,\beta,\delta,\eta, \eta$ = 1, 2, 3, 4).

Мы возвращаемся к задаче разложения НП некоторой группы по НП меньшей группы, в частности, по представлениям произведения двух меньших групп. Хорошо известным примером является

является группа $SU(6) \supset SU(3) \times SU(2)_S$, которая в нерелятивистском пределе объединила группу унитарной симметрии SU(3) и спиновую группу $SU(2)_S$. В рамках SU(6) кварки принадлежат спинорному представлению размерности 6_6, которое в пространстве группы $SU(3) \times SU(2)_S$ может быть записано как $6_6 = (3,2)$, где первый символ в скобках относится к 3-спинору SU(3), а второй относится к 2-мерному спинору SU(2). Образуем произведение 6-спинора и соответствующего 6-антиспинора и разложим его по представлениям произведения групп $SU(3) \times SU(2)_S$:

$$\bar{6}_6 \times 6_6 = 35_6 + 1_6 = (\bar{3},2) \times (3,2) = (\bar{3} \times 3, 2 \times 2) =$$
$$= (8 + 1, 3 + 1) = [(8,1) + (8,3) + (1,3)] + (1,1),$$

таким образом, в 35_6-плете оказывается точно 8 мезонов нулевого спина, 9 = 8 + 1 векторных мезонов, кроме того, есть еще один мезон в качестве синглета SU(6). Этот результат полностью согласуется с данными по легким мезонам (условно из кварков u,d,s). Чтобы продвинуться дальше, образуем произведение двух 6-спиноров в соответствии с нашими формулами, выделив в произведении спиноров симметричный и антисимметричный тензоры 2-го ранга:

$$6_6 \times 6_6 = 21_6 + 15_6 = (3,2) \times (3,2) = (3 \times 3, 2 \times 2) =$$
$$= (6_3 + \bar{3}_3, 3 + 1) = \{(6_3,3) + (3_3,1)\}_{21} + [(6_3,1) + (\bar{3}_3,3)]_{15},$$

причем размерности симметричного тензора 2-го ранга есть n(n + 1)/2, а антисимметричного - n(n - 1)/2. Переходим теперь к произведению $15_6 \times 6_6$, которое, как мы уже видели, сводится к сумме двух тензоров 3-го ранга, один из них антисимметричен по всем индекса с размерностью ($N^{AAA} = n(n^2 - 3n + 2)/6$), а другой - со смешанной симметрией размерности ($N_{mix} = n(n^2 - 1)/3$):

$$15_6 \times 6_6 = 20_6 + 70_6 = [(6_3,1) + (\bar{3}_3,3)] \times (3,2) =$$
$$= (6 \times 3, 2) + (\bar{3} \times 3, 3 \times 2) =$$
$$= [(8,2) + (1,4)]_{20} + [(8,4) + (10,2) + (8,2) + (1,2)]_{70}.$$

А произведение $21_6 \times 6_6$ распадается в сумму НП 3-го ранга, один из которых симметричен по всем трем индексам с размерностью ($N^{SSS} = n(n^2 + 3n + 2)/6$), а другой опять-таки смешанной симметрии размерности ($N_{mix} = n(n^2 - 1)/3$), и мы воспользуемся полученным выше разложением, чтобы получить разложение 56_6-плет:

$$21_6 \times 6_6 = 56_6 + 70_6 = \{(6_3,3) + (\bar{3}_3,1)\} \times (3,2) =$$
$$= (6_3 \times 3_3, 3 \times 2) + (\bar{3}_3 \times 3, 1 \times 2) =$$
$$= \{((8,2) + (10,4))\}_{56} + [(8,2) + (1,4)]_{20} + [(8,4) + (10,2) + (8,2) + (1,2)]_{70}.$$

Мы воспроизвели знаменитый результат SU(6), что в одном НП размерности 56_6 помещаются октет барионов спина 1/2 и декуплет барионных резонансов спина 3/2! Отметим, что кварковая модель со всеми равными параметрами кварков, как-то массы, магнитные магнитоны и т.п., прямо воспроизводит модель SU(6), как, впрочем, это и должно быть. В некотором смысле 3-кварковая модель дает способ расчетов, альтернативный тензорному счислению в рамках группы.

Несколько слов о разложении НП некоторой группы по НП суммы меньших групп. Мы уже рассматривали пример разложения НП SU(4) по НП SU(3). Для дальнейших приложений нам может понадобиться разложение НП группы SU(5) по представлениям прямой суммы групп SU(3) + SU(2). В этом случае запишем 5-спинор SU(5) в виде прямой суммы: $5_5 = (3_3,1) + (1_3,2)$. Образуя произведение двух 5спиноров, получаем:

$$5_3 \times 5_3 = 15_3 + 10_3 = (3_3,1) + (1_3,2) \times (3_3,1) + (1_3,2) =$$
$$= (3_3 \times 3_3,1) + (3_3,2) + (3_3,2) + (1_3,2 \times 2) =$$
$$= \{(6,1) + (3_3,2) + (1,3)\}_{15} + [(3_3,2) + (\bar{3}_3,1) + (1,1)]_{10},$$

Таким образом, НП SU(5) размерностей 5 и 10 редуцируется в сумму НП SU(3) + SU(2):

$$5_5 = (3_3,1) + (1_3,2),$$
$$10_5 = (3_3,2) + (\bar{3}_3,1) + (1,1).$$

В этом случае достаточно легко получить эти разложения и с помощью тензорного счисления.

Содержание | Продолжение

3.1 Электромагнитный ток в унитарной симметрии и в кварковой модели

Основные свойства электромагнитного взаимодействия предполагаются известными на уровне обычных курсов физического факультета. Предполагается, в частности, известным вид лагранжиана взаимодействия электронов с электромагнитным полем. Электромагнитный ток отдельных барионов и кварков можно задать совершенно аналогичным образом через лагранжиан взаимодействия частицы заряда e, описываемой спинорным полем $\Psi(x)$, с электромагнитным полем $A^{\mu}(x)$:

$$L = eJ_{\mu}(x)A^{\mu}(x) = e\overline{\psi}(x)\gamma_{\mu}\psi(x)A^{\mu}(x). \tag{3.1}$$

(При этом мы пока рассматриваем барион как точечный.)

Переход к унитарной симметрии означает, что вместо $\Psi(x)$ для каждого бариона, следует подставить теперь весь октет целиком $B^{\alpha}_{\beta}(x)$.

А каковы свойства электромагнитного тока в унитарной симметрии? Поскольку электромагнитный ток есть суперпозиция изовектора и изоскаляра, и сам ток заряда не несет, его можно связать с компонентой J^1_{μ} октета векторных токов $J^{\alpha}_{\mu\beta}$. Часть тока, связанная с электрическим зарядом, должна быть такой, чтобы заряды частиц оказались правильными. Опуская пространственные индексы, запишем

$$eJ^1_1 = e(\overline{B}^{\alpha}_1 B^1_{\alpha} - \overline{B}^1_{\alpha} B^{\alpha}_1). \tag{3.1}$$

Здесь p = B^1_3 и т.д.- октетная матрица барионов $J^P = 1/2^+$. Легко видеть, что заряды барионов воспроизводятся правильно. То же справедливо и для мезонов.

Рассмотрим в импульсном представлении часть лагранжиана взаимодействия, связанную с магнитным моментом,

$$\begin{aligned}\overline{u}(p_2)\gamma_{\mu}u(p_1)\varepsilon_{\mu} &= \overline{\chi}^{\dagger}_2\left(1,-\frac{\vec{\sigma}\vec{p}_2}{E_2+m_2}\right)\begin{pmatrix}0 & -(\vec{\sigma}\vec{\varepsilon})\\ (\vec{\sigma}\vec{\varepsilon}) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \frac{\vec{\sigma}\vec{p}_1}{E_1+m_1}\end{pmatrix}\chi_1\\ \overline{\chi}^{\dagger}_2(\vec{\sigma}\vec{k})(\vec{\sigma}\vec{\varepsilon})\chi_1 &= ik_3\varepsilon_1\overline{\chi}^{\dagger}_2\sigma_2\chi_1 - ik_3\varepsilon_2\overline{\chi}^{\dagger}_2\sigma_1\chi_1 =\\ &= H_{k_2}\overline{\chi}^{\dagger}_2\sigma_2\chi_1 + H_{k_1}\overline{\chi}^{\dagger}_2\sigma_1\chi_1 = \vec{H}_{\vec{k}}\overline{\chi}^{\dagger}_2\vec{\sigma}\chi_1 = \vec{\mu}\vec{H}.\end{aligned} \tag{3.3}$$

(в импульсном представлении при выборе $\vec{k}$ = (0,0,k_3), H_1 = -$k_3\varepsilon_2$, H_2 = $k_3\varepsilon_1$, H_3 = 0. Когда же мы хотим определить магнитный момент по взаимодействию частицы с внешним магнитным полем, обычно выбираем систему, в которой $\vec{H}$ = (0,0,H_3).)

Эта та часть магнитного момента, которая обычно именуется нормальным магнитным моментом, присущим частицам спина 1/2, чьи волновые функции удовлетворяют уравнению Дирака.

Но есть еще одна структура Лоренца, которая приводит к аналогичному конечному выражению в нерелятивистском пределе:

$$\overline{u}(p_2)\hat{k}\hat{\varepsilon}u(p_1) = \overline{\chi}^{\dagger}_2\left(1,-\frac{\vec{\sigma}\vec{p}_2}{E_2+m_2}\right)\begin{pmatrix}k_0 & -(\vec{\sigma}\vec{k})\\ (\vec{\sigma}\vec{k}) & -k_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -(\vec{\sigma}\vec{\varepsilon})\\ (\vec{\sigma}\vec{\varepsilon}) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \frac{\vec{\sigma}\vec{p}_1}{E_1+m_1}\end{pmatrix}\chi_1,$$

$$\bar{\chi}_2^{\dagger}(\vec{\sigma}\vec{k})(\vec{\sigma}\vec{\varepsilon})\chi_1,$$

$(a \equiv \gamma_\mu a_\mu = \gamma_0 a_0 - \vec{\gamma}\vec{a})$

Эта часть магнитного момента частицы обычно именуется аномальным магнитным моментом, для заряженных адронов соразмерного с величиной нормального магнитного момента, так что полный магнитный момент есть для них сумма этих двух моментов, а для нейтральных составляет полный магнитный момент частицы.

При построении октета барионного тока из произведения октетов барионов и антибарионов (с произвольной пространственной структурой тока!), возможны, как мы уже знаем, две различные унитарные тензорные структуры (что соответствует наличию двух октетов в разложении 8 x 8=1 + 8 + 8 + 10 + 10* + 27)

$$J_\beta^\alpha = F(\bar{B}_\beta^\gamma B_\gamma^\alpha - \bar{B}_\gamma^\alpha B_\beta^\gamma) + D(\bar{B}_\beta^\gamma B_\gamma^\alpha + \bar{B}_\gamma^\alpha B_\beta^\gamma) - \frac{2}{3}\delta_\beta^\alpha D\bar{B}_\eta^\gamma B_\gamma^\eta, \tag{3.5}$$

причем $J_\gamma^\gamma = 0, \alpha, \beta, \gamma, \eta$ =1,2,3, и тогда электромагнитный ток (мы опускаем пространственные индексы) запишется как

$$J_1^1 = F(\bar{B}_1^\alpha B_\alpha^1 - \bar{B}_\alpha^1 B_1^\alpha) + D(\bar{B}_1^\alpha B_\alpha^1 + \bar{B}_\alpha^1 B_1^\alpha - \frac{2}{3}\bar{B}_\beta^\alpha B_\alpha^\beta). \tag{3.6}$$

В результате для магнитных моментов барионов получим:

$$\begin{gathered}
\mu(p) = F + \mathrm{frac}\{1\}\{\}D/3, \\
\mu(n) = -2D/3, \\
\mu(\Sigma^+) = F + D/3, \\
\mu(\Sigma^-) = -F + D/3, \\
\mu(\Xi^0) = -2D/3, \\
\mu(\Xi^-) = -F + D/3, \\
\mu(\Lambda^0) = -D/3.
\end{gathered} \tag{3.7}$$

(Напомним, что здесь $B_3^1 = p$.) Во многих современных моделях именно этими формулами задаются лидирующие вклады в магнитные моменты барионов, к которым затем добавляются вклады, рассчитываемые часто в рамках очень сложных теоретических построений.

А как построить электромагнитный ток кварков?

$$J_\mu^{el-m} = \frac{2}{3}\bar{t}\gamma_\mu t + \frac{2}{3}\bar{c}\gamma_\mu c + \left[\frac{2}{3}\bar{u}\gamma_\mu u - \frac{1}{3}\bar{d}\gamma_\mu d - \frac{1}{3}\bar{s}\gamma_\mu s\right] - \frac{1}{3}\bar{b}\gamma_\mu b, \tag{3.8}$$

где в квадратных скобках выделен электромагнитный ток 3-х кварковой модели.

А как здесь решить задачу построения тех же магнитных моментов барионов октета? Для этого придется в явном виде расписать барионные волновые функции через кварковые. В модели $SU(3)_f$-симметрии :

$$\sqrt{6}B_\beta^\alpha = \varepsilon_{\beta\delta\eta}(q^\alpha, q^\delta)q^\eta.$$

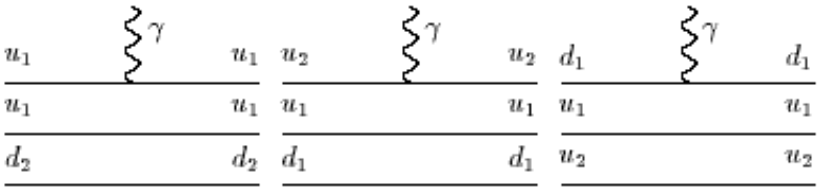
Тогда в нерелятивистском пределе магнитный момент бариона будет суммой вкладов магнитных моментов кварков, а оператор магнитного момента кварка q есть просто $\hat{\mu}_q \sigma_z^q$ (кварк, на который действует оператор магнитного момента, будем отмечать звездочкой *).

$$\mu_p = \sum_{q=u,d} \langle p\uparrow | \hat{\mu}_q \sigma_z^q | p\uparrow \rangle =$$
$$= \frac{1}{6} \langle 2u_1u_1d_2 - u_1d_1u_2 - d_1u_1u_2 | \hat{\mu}_q \sigma_z^q | 2u_1u_1d_2 - u_1d_1u_2 - d_1u_1u_2 \rangle =$$
$$= \frac{1}{6} \sum_{q=u,d} \langle 2u_1u_1d_2 - u_1d_1u_2 - d_1u_1u_2 \} | \hat{\mu}_q | 2u^*_1u_1d_2 + 2u_1u^*_1d_2 -$$
$$- 2u_1u_1d^*_2 - u^*_1d_1u_2 - u_1d^*_1u_2 + u_1d_1u^*_2 - d^*_1u_1u_2 - d_1u^*_1u_2 + d_1u_1u^*_2 \rangle = \quad (3.9)$$
$$= \frac{1}{6} (4\mu_u + 4\mu_u - 4\mu_d + \mu_u + \mu_d - \mu_u + \mu_d \} + \mu_u - \mu_u) =$$
$$= \frac{1}{6} (8\mu_u - 2\mu_d \}) = \frac{4}{3} \mu_u - \frac{1}{3} \mu_d,$$

где воспользовались тем, что два кварка из трех-спектаторы, так что

$$\langle u_1u_1d_2 | \hat{\mu}_q | u^*_1u_1d_2 \rangle = \langle u_1 | \hat{\mu}_q | u^*_1 \rangle = \mu_u \text{ etc.}$$

Соответствующие кварковые диаграммы можно записать как (приведена только часть из них, остальные сразу можно написать, исходя из подробно выписанного выше матричного элемента):



Подобным образом можно получить в рамках кварковой модели магнитный момент нейтрона:

$$\mu_n = \sum_{q=u,s} \langle n\uparrow | \hat{\mu}_q \sigma_z^q | n\uparrow \rangle =$$
$$= \frac{1}{6} \langle 2d_1d_1u_2 - d_1u_1d_2 - u_1d_1d_2 | \hat{\mu}_q \sigma_z^q | 2d_1d_1u_2 - d_1u_1d_2 - u_1d_1d_2 \rangle =$$
$$= \frac{4}{3} \mu_d - \frac{1}{3} \mu_u,$$

магнитный момент гиперона Σ^+:

$$\mu(\Sigma^+) = \sum_{q=u,d} \langle \Sigma^+\uparrow | \hat{\mu}_q \sigma_z^q | \Sigma^+\uparrow \rangle =$$
$$= \frac{1}{6} \langle 2u_1u_1s_2 - u1s1u_2 - s_1u_1u_2 | \hat{\mu}_q \sigma_z^q | 2u_1u_1s_2 - u_1s_1u_2 - s_1u_1u_2 \rangle =$$
$$= \frac{4}{3} \mu_u - \frac{1}{3} \mu_s,$$

магнитный момент гиперона Σ^-:

$$\mu(\Sigma^-) = \sum_{q=u,d} <\Sigma^-\uparrow|\hat{\mu}_q \sigma_z^q|\Sigma^-\uparrow> =$$

$$= \frac{1}{6} <2d_1d_1s_2 - d_1s_1d_2 - s_1d_1d_2|\hat{\mu}_q \sigma_z^q|2d_1d_1s_2 - d_1s_1d_2 - s_1d_1d_2> =$$

$$= \frac{4}{3}\mu_d - \frac{1}{3}\mu_s,$$

магнитный момент гиперона Λ (получение которого мы выпишем подробнее из-за того, что он имеет волновую функцию другого вида) :

$$\mu(\Lambda) = \sum_{q=u,d,s} <\Lambda\uparrow|\hat{\mu}_q \sigma_z^q|\Lambda\uparrow> =$$

$$= \frac{1}{4} <u_1s_1d_2 + s_1u_1d_2 - d_1s_1u_2 - s_1d_1u_2|\hat{\mu}_q \sigma_z^q|u_1s_1d_2 + s_1u_1d_2 - d_1s_1u_2 - s_1d_1u_2> =$$

$$= \frac{1}{4} <u_1s_1d_2 + s_1u_1d_2 - d_1s_1u_2 - s_1d_1u_2|\hat{\mu}_q|\, u^*_1s_1d_2 + u_1s^*_1d_2 - u_1s_1d^*_2 + s^*_1u_1d_2 + \quad (3.10)$$

$$+ s_1u^*_1d_2 - s_1u_1d^*_2 - d^*_1s_1u_2 - d_1s^*_1u_2 + d_1s_1u^*_2 - s^*_1d_1u_2 - s_1d^*_1u_2 + s_1d_1u^*_2> =$$

$$= \frac{1}{4}(\mu_u + \mu_s - \mu_d + \mu_s + \mu_u - \mu_d + \mu_d + \mu_s - \mu_u + \mu_s + \mu_d - \mu_u) = \mu_s,$$

магнитный момент каскадного гиперона Ξ^0:

$$\mu(\Xi^0) = \sum_{q=u,s} <\Xi^0\uparrow|\hat{\mu}_q \sigma_z^q|\Xi^0\uparrow> =$$

$$= \frac{1}{6} <2s_1s_1u_2 - s_1u_1s_2 - u_1s_1s_2|\hat{\mu}_q \sigma_z^q|2s_1s_1u_2 - s_1u_1s_2 - u_1s_1s_2> =$$

$$= \frac{4}{3}\mu_s - \frac{1}{3}\mu_u,$$

и магнитный момент каскадного гиперона Ξ^-:

$$\mu(\Xi^-) = \sum_{q=d,s} <\Xi^-\uparrow|\hat{\mu}_q \sigma_z^q|\Xi^-\uparrow> =$$

$$= \frac{1}{6} <2s_1s_1d_2 - s_1d_1s_2 - d_1s_1s_2|\hat{\mu}_q \sigma_z^q|2s_1s_1d_2 - s_1d_1s_2 - d_1s_1s_2> =$$

$$= \frac{4}{3}\mu_s - \frac{1}{3}\mu_d.$$

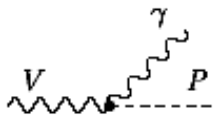
Здесь $q_1 = q\uparrow$, $q_2 = q\downarrow$, q = u,d,s,c,b,t.

Для примера приведем некоторые результаты теоретических расчетов магнитных моментов барионов и соответствующие экспериментальные данные.

μ(B) в μ_N из [2]	μ(B) в μ_N из [3]	μ(B) в μ_N из [4]	μ(B) в μ_N из [5]	μ(B) в μ_N из [6]
2.69	2.78	2.75	2.793	2.79
-1.85	-1.86	-1.84	-1.69	-1.91
2.59	2.50	2.69	2.481	2.43
-1.22	-1.215	-0.98	-1.155	-1.15
-0.61	-0.6397	-0.66	-0.6507	-0.66
-1.33	-1.244	-1.58	-1.274	-1.25
-0.59	-0.631	-0.72	-0.604	-0.64

3.1.2 Радиационные распады векторных мезонов

Обратимся к радиационным распадам векторных мезонов $V \to P + \gamma$.



Запишем в рамках модели унитарной симметрии электромагнитный ток, описывающий радиационные распады векторных мезонов, в виде компоненты 11 октета, построенного из произведения октета псевдоскалярных и нонета векторных мезонов:

$$\begin{aligned} J_1^1 &= P_\gamma^1 V_1^\gamma + P_1^\gamma V_\gamma^1 - \frac{2}{3}\mathrm{Sp}\ PV = \\ &= P_1^1 V_1^1 + (P_2^1 V_1^2 + P_3^1 V_1^3) + (P_1^2 V_2^1 + P_1^3 V_3^1) - \frac{2}{3}\mathrm{Sp}\ PV = \\ &= 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{6}\eta\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\rho^0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\omega\right) - \frac{2}{3}(\pi^0\rho^0 + \pi^+\rho^- + \pi^-\rho^+) + \ldots \end{aligned} \qquad (3.11)$$

Лагранжиан взаимодействия, описывающий эти переходы, выберем в виде:

$$L = g(V \to P_\gamma) J_{1\mu}^1 A_\mu.$$

Амплитуды радиационных распадов в модели унитарной симметрии:

$$\begin{aligned} M(\rho^0 \to \pi^0\gamma) &= \left(2\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{3}\right) g(V \to P_\gamma) = \frac{1}{3} gV \to P_\gamma, \\ M(\rho^\pm \to \pi^\pm\gamma) &= \left(1 - \frac{2}{3}\right) g(V \to P_\gamma) = \frac{1}{3} g(V \to P_\gamma), \\ M(\omega^0 \to \pi^0\gamma) &= 2\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} g(V \to P_\gamma) = g(V \to P_\gamma). \end{aligned} \qquad (3.12)$$

Поскольку массы ρ и ω^0 мезонов близки, пренебрежем разницей в фазовых объемах, тогда для ширин радиационных распадов получим:

$$\Gamma(\omega^0 \to \pi^0\gamma) : \Gamma(\omega^\pm \to \pi^\pm\gamma) = 9 : 1, \tag{3.13}$$

тогда как эксперимент дает для них:

$$(720 \pm 50)\ \text{кэВ}:(120 \pm 30)\text{кэВ}.$$

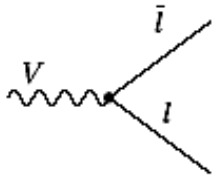
Распад ϕ-мезона оказывается запрещен в унитарной симметрии,

$$\Gamma(\phi \to \pi^0\gamma) = 0. \tag{3.14}$$

Эксперимент показывает на очень сильное подавление этого распада (6 ± 0.6) кэВ.

3.1.3 Лептонные распады векторных мезонов

Построим теперь в рамках унитарной симметрии электромагнитный ток, описывающий лептонные распады векторных мезонов $V \to l^+l^-$.



В свете предыдущих построений легко понять, что следует просто выделить октет в нонете векторных мезонов и взять компоненту 11:

$$J_1^1 = gV_{\bar{l}l}\left(V_1^1 - \frac{1}{3}V_\alpha^\alpha\right) = gV_{\bar{l}l}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\rho^0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\omega\right) - \frac{1}{3}\left(\sqrt{2}\omega + \phi\right)\right] = gV_{\bar{l}l}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\rho^0 + \frac{1}{3\sqrt{2}}\omega - \frac{1}{3}\phi\right). \tag{3.15}$$

Отношение ширин распадов предсказывается унитарной симметрией как

$$\Gamma(\rho^0 \to e^+e^-) : \Gamma(\omega^0 \to e^+e^-) : \Gamma(\phi^0 \to e^+e^-) = 9 : 1 : 2,$$

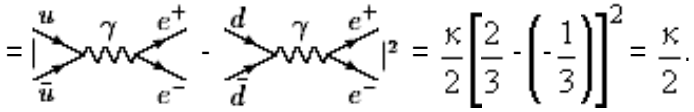
что прекрасно согласуется с экспериментальными данными:

$$6.8\ \text{кэВ} : 0.6\ \text{кэВ} : 1.3\ \text{кэВ}.$$

Вычислим эти же радиационные распады в кварковой модели, воспользовавшись известными кварковыми волновыми функциями векторных мезонов.

Для $\rho^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u - \bar{d}d)$

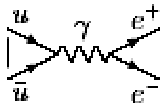
$$\Gamma(\rho^0 \to e^+ + e^-) =$$

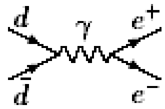


$$= |\ \ -\ \ |^2 = \frac{\kappa}{2}\left[\frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right]^2 = \frac{\kappa}{2}.$$

Для $\omega^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u + \bar{d}d)$

$$\Gamma(\omega^0 \to e^+ + e^-) =$$

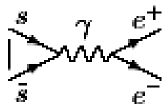
= | 

+ 

$|^2 = \frac{\kappa}{2}\left[\frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right)\right]^2 = \frac{\kappa}{2}\frac{1}{9}.$

Для $\phi = (\bar{s}s)$

$$\Gamma(\phi \to e^+ + e^-) =$$

= | 

$|^2 = \kappa\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{\kappa}{2}\frac{2}{9}.$

Мы видим, что предсказания модели унитарной симметрии и кварковой модели для ширин лептонных распадов векторных мезонов совпадают между собой и согласуются с экспериментальными данными.

Содержание Продолжение

3.2 Фотон как калибровочное поле

До сих пор мы подразумевали, что фотон- такая же частица как и все остальные : бозон со спином 1 и массой 0. Но оказывается, его существование может быть истолковано как проявление локальной калибровочной инвариантности лагранжиана, описывающего свободное поле заряженного фермиона спина 1/2, например, электрона. Свободное движение электрона подчиняется уравнению Дирака

$$(\partial_\mu \gamma_\mu - m_e)\Psi_e(x) = 0,$$

которое может быть получено из лагранжиана

$$L_0 = \overline{\Psi}_e(x)\partial_\mu \gamma_\mu \Psi_e(x) + m_e \overline{\Psi}_e(x)\Psi_e(x). \tag{3.16}$$

Этот лагранжиан инвариантен относительно калибровочного преобразования

$$\Psi'_e(x) = e^{i\alpha}\Psi_e(x),$$

где α - произвольная вещественная фаза. Потребуем теперь инвариантности лагранжиана относительно подобного, но локального калибровочного преобразования, когда α является функцией x:

$$\Psi'_e(x) = e^{i\alpha(x)}\Psi_e(x). \tag{3.17}$$

Но L_0 неинвариантен относительно подобного локального калибровочного преобразования:

$$\begin{aligned} L'_0 &= \overline{\Psi}'_e(x)\partial_\mu \gamma_\mu \Psi'_e(x) + m_e \overline{\Psi}'_e(x)\Psi'_e(x) = \\ &= \overline{\Psi}_e(x)\partial_\mu \gamma_\mu \Psi_e(x) + i\frac{\partial\alpha(x)}{\partial x_\mu}\overline{\Psi}_e(x)\gamma_\mu \Psi_e(x) + m_e \overline{\Psi}_e(x)\Psi_e(x). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Для того, чтобы убрать член, нарушающий калибровочную инвариантность, введем векторное поле A^μ с калибровочным преобразованием

$$A_\mu' = A_\mu - \frac{i}{e}\frac{\partial\alpha(x)}{\partial x_\mu}, \tag{3.19}$$

взаимодействие которого с электроном зададим лагранжианом

$$e\overline{\Psi}_e(x)\gamma_\mu \Psi_e(x)A_\mu,$$

где e- константа связи или константа взаимодействия. Массу этого поля мы ввести не можем, поскольку очевидным образом массовый член в лагранжиане $m_\gamma A_\mu A^\mu$ неинвариантен относительно выбранного калибровочного преобразования для поля A_μ. Отождествим поле A_μ с электромагнитным полем и запишем окончательное выражение для лагранжиана, инвариантного относительно локальных калибровочных преобразований абелевой группы U(1)

$$L_0 = \overline{\Psi}_e(x)\partial_\mu\gamma_\mu\Psi_e(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + e\overline{\Psi}_e(x)\gamma_\mu\Psi_e(x)A_\mu + m_e\overline{\Psi}_e(x)\Psi_e(x). \qquad (3.20)$$

где $F_{\mu\nu}$ описывает свободное электромагнитное поле,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

удовлетворяющее уравнениям Максвелла

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = 0, \ \partial_\mu A_\mu = 0.$$

Векторный 4-потенциал электромагнитного поля $A_\mu = (\phi, \vec{A})$ связан с измеряемыми на опыте магнитным $\vec{H}$ и электрическим $\vec{E}$ полями соотношениями

$$\vec{H} = \mathrm{rot}\,\vec{A}, \quad \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\,\phi,$$

а тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ выражается через поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ как

$$F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_x & E_x \\ -E_x & 0 & H_z & -H_y \\ -E_y & -H_z & 0 & H_x \\ -E_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Уравнения Максвелла в присутствии зарядов и токов имеют вид

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\,\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}, \quad \mathrm{div}\,\vec{H} = 0, \\ \mathrm{rot}\,\vec{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}, \quad \mathrm{div}\,\vec{E} = 4\pi\rho, \end{aligned} \qquad (3.21)$$

где ρ - плотность электрического заряда, j - плотность электрического тока. В 4-мерном виде уравнения Максвелла в присутствии зарядов и токов можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \partial_\mu F_{\mu\nu} &= j_\nu, \quad j_\nu = (\rho, \vec{j}), \\ \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\partial_\beta F_{\mu\nu} &= 0, \quad \partial_\mu A_\mu = 0. \end{aligned} \qquad (3.22)$$

Содержание Продолжение

3.3 Ро-мезон как калибровочное поле

В 1954 году Янг и Миллс решили попробовать получить ρ-мезон также в качестве калибровочного поля. ρ-мезоны были тогда только что открыты, и представлялось, что они могут оказаться искомыми квантами сильного взаимодействия. Подобно рассмотренному случаю с фотоном, напишем лагранжиан для свободного нуклонного поля, где нуклон есть спинор группы изотопических преобразований SU(2) с компонентами +1/2 (протон) и -1/2 (нейтрон):

$$L_0 = \overline{\Psi}_N(x)\partial_\mu\gamma_\mu\Psi_N(x) + m_N\overline{\Psi}_N(x)\Psi_N(x). \tag{3.23}$$

Этот лагранжиан инвариантен относительно глобального калибровочного преобразования в изотопическом пространстве

$$\Psi'_N(x) = e^{i\vec{\alpha}\vec{\tau}}\Psi_N(x),$$

где $\vec{\alpha} = (\alpha1, \alpha2, \alpha3)$ - три произвольные вещественные фазы. Потребуем теперь инвариантности лагранжиана относительно подобного, но локального калибровочного преобразования в изотопическом пространстве, когда $\vec{\alpha}$ является функцией x:

$$\Psi'_N(x) = e^{i\vec{\alpha}(x)\vec{\tau}}\Psi_N(x). \tag{3.24}$$

Но, как и в предыдущем случае, L_0 неинвариантен относительно подобного локального калибровочного преобразования:

$$\begin{aligned} L'_0 &= \overline{\Psi}'_N(x)\partial_\mu\gamma_\mu\Psi'_N(x) + m_N\overline{\Psi}'_N(x)\Psi'_N(x) = \\ &= \overline{\Psi}_N(x)\partial_\mu\gamma_\mu\Psi_N(x) + i\frac{\partial\vec{\tau}\vec{\alpha}(x)}{\partial x_\mu}\overline{\Psi}_N(x)\gamma_\mu\Psi_N(x) + m_N\overline{\Psi}_N(x)\Psi_N(x). \end{aligned} \tag{3.25}$$

Для того, чтобы убрать член, нарушающий калибровочную инвариантность, введем изотриплет векторных полей $\vec{\rho}_\mu$ с калибровочным преобразованием

$$\vec{\tau}\vec{\rho}'_\mu = U\vec{\tau}\vec{\rho}_\mu U^\dagger - \frac{1}{g_{NN\rho}}U^\dagger\frac{\partial U}{\partial x_\mu}, \tag{3.26}$$

где $U = e^{i\vec{\alpha}(x)\vec{\tau}}$. Взаимодействие этого изовекторного поля с нуклоном зададим лагранжианом

$$g_{NN\rho}\overline{\Psi}_N(x)\gamma_\mu\vec{\tau}\vec{\rho}_\mu\Psi_N(x),$$

где $g_{NN\rho}$ - константа связи или константа взаимодействия нуклонов с ρ-мезонами. Массу этого поля мы ввести не можем, поскольку очевидным образом массовый член в лагранжиане $m_\gamma\vec{\rho}_\mu\vec{\rho}^\mu$ неинвариантен относительно выбранного калибровочного преобразования для поля $\vec{\rho}_\mu$. Запишем окончательное выражение для лагранжиана, инвариантного относительно локальных калибровочных преобразований неабелевой группы SU(2)

$$L = \bar{\Psi}_N(x)\partial_\mu\gamma_\mu\Psi_N(x) + m_N\bar{\Psi}_N(x)\Psi_N(x) + g_{NN\rho}\bar{\Psi}_N(x)\gamma_\mu\vec{\tau}\vec{\rho}_\mu\Psi_N(x) - \frac{1}{4}\vec{F}_{\mu\nu}\vec{F}^{\mu\nu}, \quad (3.27)$$

где $\vec{F}_{\mu\nu}$ - свободное безмассовое ρ-мезонное поле. Оно инвариантно относительно калибровочных преобразований $U^\dagger\vec{F}'_{\mu\nu}U = \vec{F}_{\mu\nu}$. Подробнее выпишем тензор свободного ρ-мезонного поля $\vec{\tau}\vec{F}_{\mu\nu} = \tau_k F^k_{\mu\nu} \equiv \hat{f}_{\mu\nu}$, ($[\tau_i, \tau_j] = 2i\epsilon^{ijk}\tau_k$, i, j, k = 1, 2, 3):

$$F^k_{\mu\nu} = (\partial_\nu\rho^k_\mu - \partial_\mu\rho^k_\nu) - 2g_{NN\rho}i\epsilon^{ijk}\rho^i_\mu\rho^j_\nu \quad (3.23)$$

или

$$\hat{F}_{\mu\nu} = (\partial_\nu\tilde{\rho}_\mu - \partial_\mu\tilde{\rho}_\nu) - g_{NN\rho}[\tilde{\rho}_\mu, \tilde{\rho}_\nu]$$

и убедимся, что это выражение крвариантным образом преобразуется при калибровочным преобразовании над полем ρ:

$$\begin{gathered} U^\dagger(\partial_\nu\tilde{\rho}'_\mu - \partial_\mu\tilde{\rho}'_\nu)U = \\ (\partial_\nu\tilde{\rho}'_\mu - \partial_\mu\tilde{\rho}'_\nu) + [U^\dagger\partial_\nu U, \tilde{\rho}_\mu] - [U^\dagger\partial_\mu U, \tilde{\rho}_\nu], \\ U^\dagger[\tilde{\rho}', \tilde{\rho}'_\nu]U = [\tilde{\rho}_\mu, \tilde{\rho}_\nu] + \frac{1}{g_{NN\rho}}[U^\dagger\partial_\nu U, \tilde{\rho}_\mu] - \frac{1}{g_{NN\rho}}[U^\dagger\partial_\mu U, \tilde{\rho}_\nu]. \end{gathered} \quad (3.23)$$

Окончательно

$$\begin{gathered} U^\dagger\vec{F}'_{\mu\nu}U = U^\dagger(\partial_\nu\tilde{\rho}'_\mu - \partial_\mu\tilde{\rho}'_\nu - g_{NN\rho}[\tilde{\rho}'_\mu, \tilde{\rho}'_\nu])U = \\ \partial_\nu\tilde{\rho}_\mu - \partial_\mu\tilde{\rho}_\nu - g_{NN\rho}[\tilde{\rho}_\mu, \tilde{\rho}_\nu] = \vec{F}_{\mu\nu}. \end{gathered} \quad (3.23)$$

Важно отметить здесь особенность неабелева векторного поля - оно оказывается самодействующим, т.е. в лагранжиане в члене $(-1/4)|\vec{F}^{\mu\nu}|^2$ появляются члены не только билинейные по полю ρ, как это получалось в случае (абелева) электромагнитного поля, но и члены 3- и 4- линейные по полю ρ вида $\rho_\nu\rho_\mu\partial_\nu\rho_\mu$ и $\rho^2_\nu\rho^2_\mu$.

Этот формализм был обобщен на $SU(3)_f$, где был построен лагранжиан, описывающий барионы октета. Требование локальной калибровочной инвариантности относительно группы ароматов $SU(3)_f$ приводит к появлению октета безмассовых векторных мезонов с квантовыми числами знакомого нам октета мезонов 1^-.

К сожалению, на этом пути не удалось построить теории сильных взаимодействий с векторными мезонами в качестве квантов сильного поля. Но был создан формализм, позволивший решить эту задачу уже не в пространстве ароматов с группой калибровочной симметрии $SU(3)_f$, а в пространстве цветов с группой калибровочной симметрии $SU(3)_C$, где квантами поля оказались безмассовые векторные бозоны, несущие цвет - глюоны.

Содержание Продолжение

Векторный и аксиально-векторный слабые токи в унитарной симметрии и кварковой модели

4.1 Общие сведения о слабом взаимодействии

Рассмотрим теперь применение модели унитарной симметрии и кварковой модели к описанию процессов слабого взаимодействия элементарных частиц.

Несколько слов о слабом взаимодействии. Как известно, мюоны,нейтроны, Λ-гипероны распадаются по слабому взаимодействию. Мы здесь упомянули мюон, поскольку лептоны (на сегодняшний день) - точечные, т. е. бесструктурные частицы, и константы связи их с квантами различных полей выступают так сказать в чистом виде, их не затемняет структура частицы, как это происходит у адронов. Распад мюона на электрон и два нейтрино характеризуется константой Ферми $G_F \sim 10^{-5} m_p^{-2}$. Распад нейтрона на протон, электрон и антинейтрино характеризуется практически той же константой связи. В то же время слабый распад Λ-гиперона на протон, электрон и антинейтрино характеризуется значительно меньшей константой связи. То же различие характерно для констант распадов нестранного пиона и странного каона на лептоны. Значит ли это, что слабые взаимодействия, в отличие от электромагнитного, неуниверсальны? Может быть и так. А можно спасти универсальность? Оказывается, можно, и это было сделано Кабиббо в 1964 году введением угла Кабиббо θ_C. Достаточно предположить, что слабые взаимодействия без нарушения странности задаются не константой Ферми G_F, а константой $G_F \cos\theta_C$, а слабые взаимодействия с нарушением странности задаются константой $G_F \sin\theta_C$. Эта гипотеза блестяще подтвердилась при анализе многочисленных слабых распадов мезонов и барионов и с сохранением, и с нарушением странности. Значение угла Кабиббо ~ 13º.

А как описать слабые взаимодействия элементарных частиц?

Мы знаем, что электромагнитное взаимодействие можно задать лагранжианом взаимодействия вида *ток x поле*

$$L = eJ_\mu(x)A^\mu(x) = e\overline{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x). \qquad (4.1)$$

При этом, скажем, рассеяние электрона или мюона на электроне происходит не менее, чем во втором порядке по e. Эффективно можно записать рассеяние в виде *ток* x *ток*

$$L^{(2)} = \frac{e^2}{q^2} J_\mu J^\mu, \qquad (4.2)$$

где q^2 - квадрат переданного импульса. Оказалось, что рассматриваемые слабые распады описываются также эффективным лагранжианом вида *ток* x *ток*, но это для них 1-й порядок по фермиевской константе связи:

$$L_W = \frac{G_F}{\sqrt{2}} J^\dagger_\mu J^\mu + \textit{Hermitian Conjugation}. \qquad (4.3)$$

При этом ток должен иметь вид

$$J_\mu(x) = \overline{\Psi}_{\nu_\mu}(x)\, O_\mu \Psi_\mu(x) + \overline{\Psi}_{\nu e}(x)\, O_\mu \Psi_e(x) + \overline{\Psi}_p(x)\, O_\mu \Psi_n(x)\cos\theta_C + \overline{\Psi}_p(x)\, O_\mu \Psi_\Lambda(x)\sin\theta_C. \qquad (4.4)$$

По внутренним квантовым числам ток, описывающий β-распад нейтрона, аналогичен π^--мезону, а ток, описывающий β-распад Λ-гиперона, аналогичен K^--мезону. Обратим внимание на то, что слабые токи заряжены. С 1956 года установлено, что слабые токи не сохраняют четность. Это - одно из фундаментальных свойств слабого взаимодействия. Структура O_μ для заряженных слабых токов установлена из анализа многочисленных угловых распределений и оказалась линейной комбинацией вектора и

аксиального вектора, $O_\mu = \gamma_\mu(1+\gamma_5)$, что часто именуется (V-A)-вариантом теории Ферми. При этом константы связи у адронов при γ_5, вообще говоря, перенормируются (получают дополнительный множитель, который хорошо бы уметь рассчитывать теоретически).

Размерная константа Ферми, как показывает сравнение с электромагнитным процессом во втором порядке по e, может быть отражением существования очень тяжелого W-бозона, который излучается лептонами и адронами подобно фотону. Тогда наблюдаемые процессы распада мюона, протона, гиперонов - процессы 2-го порядка по константе связи g_W, а $G_F \sim g_W^2/(q^2 + M_W^2)$, причем величиной q^2 можно уверенно пренебречь.

И тогда элементарный акт взаимодействия со слабым полем можно записать не через произведение *ток* x *ток*, а просто моделируя электромагнитное взаимодействие:

$$L = \frac{g_W}{\sqrt{2}}(J_\mu W_\mu^+ + J_\mu^\dagger W_\mu^-) .$$

4.2 Слабые токи в модели унитарной симметрии

А каковы свойства слабого тока в унитарной симметрии? Поскольку слабые токи заряжены, их можно связать с компонентами J_1^2 и J_1^3 октета токов J_β^α. Сравнивая октет слабых токов и октеты мезонов, видим, что выбранные компоненты тока как раз соответствуют (по унитарным свойствам, но не по пространственной структуре) π^- и K^- мезонам. Векторный слабый ток сохраняется так же как электромагнитный ток, и имеет поэтому ту же пространственную и унитарную структуру:

$$\begin{aligned} V_{2\mu}^1 \cos\theta_C + V_{3\mu}^1 \sin\theta_C = \\ = (\overline{B}_2^\alpha \gamma_\mu B_\alpha^1 - \overline{B}_\alpha^1 \gamma_\mu B_2^\alpha)\cos\theta_C + (\overline{B}_3^\alpha \gamma_\mu B_\alpha^1 - \overline{B}_\alpha^1 \gamma_\mu B_3^\alpha)\cos\theta_C. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Здесь p = B_3^1 и т.д.-октетная матрица барионов $J^P = 1/2^+$. Но если рассматривать часть тока, связанную с нарушением четности, то там для барионов, как и для случая магнитных моментов, возможны две различные тензорные структуры, и унитарный аксиально-векторный ток запишется как

$$-A_{2\mu}^1 = F(\overline{B}_2^\alpha \gamma_\mu \gamma_5 B_\alpha^1 - \overline{B}_\alpha^1 \gamma_\mu \gamma_5 B_2^\alpha) + D(\overline{B}_2^\alpha \gamma_\mu \gamma_5 B_\alpha^1 + \overline{B}_\alpha^1 \gamma_\mu \gamma_5 B_2^\alpha). \tag{4.6}$$

То же для $A_{3\mu}^1$.

$$A_\mu^+ = A_{2\mu}^1 \cos\theta_C + A_{3\mu}^1 \sin\theta_C.$$

Для β-распада нейтрона имеем

$$G_A|_{n\to p+e+\bar{\nu}_e} = -(F+D).$$

$$G^A_{pn} = (F+D)\cos\theta_C, \quad G^A_{\Xi^0\Xi^-} = (-F+D)\cos\theta_C,$$

$$G^A_{p\Lambda} = \frac{1}{\sqrt{6}}(3F+D)\sin\theta_C, \quad G^A_{\Lambda\Xi^-} = \frac{1}{\sqrt{6}}(3F-D)\sin\theta_C, \tag{4.7}$$

$$G^A_{n\Sigma^-} = (-F+D)\sin\theta_C, G^A_{\Sigma^-\Xi^0} = (F+D)\sin\theta_C,$$

$$G^A_{\Lambda\Sigma^-} = \sqrt{\frac{2}{3}}D\cos\theta_C.$$

При F = 2/3, D = 1 ($SU(6) \supset SU(3)_f$ x $SU(2)_J$) $G_A|_{n\to p+e+\bar{\nu}_e} = -5/3$. Из экспериментального анализа всех известных лептонных распадов гиперонов найдено, что F = 0.477±0.011, D = 0.755±0.011, что воспроизводит экспериментальный результат $G_A|_{n\to p+e+\bar{\nu}_e} = -1.261\pm0.004$.

4.3 Слабые токи в кварковой модели

Теперь построим кварковые заряженные слабые токи. Если нейтрон распадается на протон (и пару лептонов), на языке кварков это может означать, что попросту один из d-кварков нейтрона переходит в u-кварк. А оставшиеся два кварка можно считать "зрителями" или, по-русски, спектаторами. А соответствующий ток можно в самом простом виде записать как

$$j^d_\mu = \bar{u}\,\gamma_\mu(1+\gamma_5)\,d\cos\theta_C. \tag{4.8}$$

Для Λ-гиперона эти рассуждения справедливы с точностью до того, что s-кварк Λ-гиперона переходит в u-кварк протона, а остальные два кварка- спектаторы. Соответствующий ток имеет вид

$$j^s_\mu = \bar{u}\,\gamma_\mu(1+\gamma_5)\,s\sin\theta_C. \tag{4.9}$$

Логически напрашивается запись

$$j_\mu = j^d_\mu + j^s_\mu = \bar{u}\,\gamma_\mu(1+\gamma_5)\,d_C, \tag{4.10}$$

где $d_C = d\cos\theta_C + s\sin\theta_C$.

Таким образом, в слабом секторе возник левоспиральный дублет

$$\begin{pmatrix} u \\ d_C \end{pmatrix}_L = (1+\gamma_5)\begin{pmatrix} u \\ d_C \end{pmatrix}.$$

В лептонном секторе слабых взаимодействий этому дублету можно сопоставить левоспиральные дублеты

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L \text{ и } \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}_L$$

(Таким образом, вся наука о группах для слабого взаимодействия может свестись к группе U(2)?).
Тогда напрашивается гипотеза о существовании слабого изотопического триплета W-бозонов,

который взаимодействует слабым образом с этим слабым изотопическим дублетом.

$$L = g_W \vec{j}_\mu \vec{W}_\mu + \text{H.C.}$$

(Оставим пока открытым вопрос о перенормируемости такой теории с массивными бозонами.)

Прежде чем расстаться с заряженными токами, вычислим константу G_A, или, что правильнее, отношение G_A/G_V для β-распада нейтрона в кварковой модели. Нерелятивистский предел для оператора $\gamma_\mu\gamma_5\tau^+$ есть $\sigma_z\tau^+$, где τ^+ переводит один из d-кварков нейтрона в u-кварк.

$$G_A^{np} = \langle p\uparrow|\hat{\mu}_q\sigma_z^q|n\uparrow\rangle = \frac{1}{6}\langle 2u_1u_1d_2 - u_1d_1u_2 - d_1u_1u_2|\tau^+\sigma_z^q|2d_1d_1u_2 - d_1u_1d_2 - u_1d_1d_2\rangle =$$

$$= \frac{1}{6}\langle 2u_1u_1d_2 - u_1d_1u_2 - d_1u_1u_2\}|\sigma_z^q|2u^*_1d_1u_2 + 2d_1u^*_1u_2 - u^*_1u_1d_2 + d_1u_1u^*_2 - u_1u^*_1d_2 + u_1d_1u^*_2\rangle = \quad (4.11)$$

$$= \frac{1}{6}(-2\ -2\ -2\ -1\ -2\ -1) = -\frac{5}{3} \quad (\text{exp.}-1.261\pm0.004).$$

Кварковый результат совпадает с результатом точной SU(6), но расходится с опытными данными, поэтому как правило в расчетах прибегают к модели $SU(3)_f$.

Содержание Продолжение

5. Основы модели Вайнберга-Салама-Глэшоу

5.1 Нейтральные слабые токи

С заряженными токами все хорошо (и можно бы писать и по-старому), но в кварковом секторе возникают еще и нейтральные токи

$$j_\mu^{\text{нейтр., ud}} = \frac{1}{2}(\bar{u} O_\mu u - \bar{d}_C O_\mu d_C) =$$
$$= \frac{1}{2}(\bar{u} O_\mu u - \bar{d} O_\mu d (\cos\theta_C)^2 - \bar{s} O_\mu s(\sin\theta_C)^2 - \bar{d} O_\mu s \cos\theta_C \sin\theta_C - \bar{s} O_\mu d\cos\theta_C \sin\theta_C). \quad (5.1)$$

и, соответственно, в лептонном:

$$j_\mu^{\text{нейтр., лепт.}} = \frac{1}{2}(\bar{\nu}_e O_\mu \nu_e - e^+ O_\mu e^-) + \frac{1}{2}(\bar{\nu}_\mu O_\mu \nu_\mu - \mu^+ O_\mu \mu^-). \quad (5.2)$$

(мы не выписываем здесь явно O_μ, этот оператор в итоге может и не совпасть с привычным $\gamma_\mu(1+\gamma_5)$.
Пока нейтральные токи не были открыты экспериментально, наличие этих токов в теории было не очень волнительно. Но когда в 1973 году произошло одно из важнейших событий в физике слабых взаимодействий второй половины 20-го века - были открыты нейтральные токи во взаимодействии нейтринных пучков ЦЕРНовского ускорителя с веществом, то сразу стало очевидным противоречие, которое необходимо было устранить немедля: хотя открытые нейтральные токи (электронный, протонный и нейтронный, эти последние интерпретируются как токи u- и d-кварков) взаимодействуют с нейтральным слабым бозоном(???) примерно с той же силой, что и заряженные нестранные токи с заряженными W-бозонами, полностью отсутствуют нейтральные слабые токи с нарушением странности, не так уж радикально подавленные углом Кабиббо; более того, нейтральные токи, приведенные выше, открывают канал распада нейтральных K-мезонов на $\mu^+\mu^-$- пару с той же интенсивностью, что и у основного канала распада заряженного K^--мезона на лептонную пару $\mu^-\bar{\nu}_\mu$. На эксперименте этот распад подавлен почти на 7 порядков!!!

$$\Gamma(K^0 \to \mu^+\mu^-)/\Gamma(K^0 \to \text{all}) < 3.2 \cdot 10^{-7}. \quad (5.3)$$

У нас опять зависла вся кварковая модель слабых взаимодействий!?
Как, если это возможно, спасти ее простым и всем понятным образом? Достаточно вспомнить про открытие J/ψ-частицы и интерпретацию ее как состояния со скрытым шармом ($\bar{c}c$).
Новый кварк с шармом - вот кто спасет ситуацию!

5.2 Модель ГИМ

Действительно, кварка теперь четыре, а в слабом изодублете задействованы три кварка. А если предположить, что 4-й c-кварк тоже образует слабый изодублет, только с комбинацией d- и s-кварков, ортогональной к $d_C = d\cos\theta_C + s\sin\theta_C$, а именно $s_C = s\cos\theta_C - d\sin\theta_C$? Тогда наряду с заряженными токами

$$j_\mu = \bar{c}\,\gamma_\mu(1+\gamma_5)\,s_C \quad (5.4)$$

должны существовать нейтральные токи вида:

$$j_\mu^{\text{нейтр.,cs}} = \frac{1}{2}(\bar{c}\,O_\mu c - \bar{s}_C\,O_\mu s_C) =$$
$$= \frac{1}{2}(\bar{u}\,O_\mu u - \bar{s}\,O_\mu s\,(\cos\theta_C)^2\} - \bar{d}\,O_\mu d(\sin\theta_C)^2 + \bar{d}\,O_\mu s\cos\theta_C\sin\theta_C + \bar{s}\,O_\mu d\cos\theta_C\sin\theta_C). \quad (5.5)$$

Полный нейтральный ток запишется теперь в виде

$$j_\mu^{\text{нейтр.,ud}} = \frac{1}{2}(\bar{u}\,O_\mu u + \bar{c}\,O_\mu c - \bar{d}\,O_\mu d - \bar{s}\,O_\mu s). \quad (5.6)$$

Здесь вовсе нет нейтральных токов, нарушающих странность! Это так называемый механизм ГИМ, предложенный в 1970 г. в работе Глэшоу, Илиопулоса и Майяни. (За это дана Нобелевская премия).

5.3 Построение модели Салама-Вайнберга

Осталось выяснить вид оператора O_μ. Это уже связано с объединением слабого и электромагнитного взаимодействий в единое электрослабое взаимодействие. Действительно, вид токов в обоих взаимодействиях замечательно близок друг к другу. А нельзя ли как-нибудь к нейтральному слабому току присоединить электромагнитный ток? Можно, и в этом и состояло основное достижение модели Салама-Вайнберга. Но мы не можем прямо добавить электромагнитный ток, поскольку он не обладает слабым изоспином. Зато можно добавить еще один слабовзаимодействующий нейтральный бозон Y_μ, приписав ему свойства слабого изосинглета. Ограничимся сектором u- и d- кварков и положим даже $\theta_C = 0$.

$$L = g\frac{1}{2}(\bar{u}_L\gamma_\mu u_L - \bar{d}_L\gamma_\mu d_L)W_{3\mu} + g'(a\bar{u}_L\gamma_\mu u_L + b\bar{u}_R\gamma_\mu u_R + c\bar{d}_L\gamma_\mu d_L + q\bar{d}_R\gamma_\mu d_R)Y_\mu =$$
$$= e\left[\frac{2}{3}(\bar{u}\gamma_\mu u_L + \bar{u}_R\gamma_\mu u_R) - \frac{1}{3}(\bar{d}_L\gamma_\mu d_L + \bar{d}_R\gamma_\mu d_R)\right]A_\mu + \kappa\, j_\mu^{\text{нейтр.,ud}}\, Z_\mu^0. \quad (5.7)$$

От двух бозонных полей $W_{3\mu}$, Y_μ надо перейти к двум другим бозонным полям A_μ, Z_μ^0, причем в связи кварков с полем уже заложен правильный электромагнитный ток. По смыслу преобразование должно быть ортогональным, и давайте выберем его в виде

$$W_{3\mu} = \frac{gZ_\mu^0 + g'A_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}},\quad Y_\mu = \frac{-g'Z_\mu^0 + gA_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}}. \quad (5.8)$$

Подставляя эти выражения в формулу для токов, получим в левой части равенства для электромагнитного тока выражение

$$\frac{g'g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}[(\frac{1}{2} + a)\bar{u}_L\gamma_\mu u_L + b\bar{u}_R\gamma_\mu u_R + (-\frac{1}{2}c\bar{d}_L\gamma_\mu d_L + q\bar{d}_R\gamma_\mu d_R)A_\mu] = eJ^{\text{em}}A_\mu, \quad (5.9)$$

откуда a = 1/6, b = 2/3, c = 1/6, q = -1/3, e = $\frac{g' g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$. Тогда для нейтрального тока получаем

$$\frac{g^2 + g'^2}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \frac{1}{2} (\bar{u}_L \gamma_\mu u_L - \bar{d}_L \gamma_\mu d_L) W_{3\mu} - \frac{g'^2}{\sqrt{g^2 + g'^2}} J^{em} =$$
$$= \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{g} g \frac{1}{2} (\bar{u}_L \gamma_\mu u_L - \bar{d}_L \gamma_\mu d_L) W_{3\mu} - \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{g} g \frac{g'^2}{g^2 + g'^2} J^{em}. \quad (5.10)$$

Введем теперь обозначения

$$\sin\theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad \cos\theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}. \quad (5.11)$$

Теперь нейтральные векторные поля свзаны между собой формулами

$$W_{3\mu} = Z^0_\mu \cos\theta_W + A_\mu \sin\theta_W, \quad Y_\mu = - Z^0_\mu \sin\theta_W + A_\mu \cos\theta_W. \quad (5.12)$$

Окончательно слабый нейтральный ток в секторе u- и d-кварков запишется в виде

$$\frac{g}{\sqrt{\cos\theta_W}} [\frac{1}{2} \bar{u}_L \gamma_\mu u_L - \bar{d}_L \gamma_\mu d_L) - J^{em} \sin^2\theta_W]. \quad (5.13)$$

Повторим эти рассуждения для сектора c- и s- кварков и восстановим угол Кабиббо, тогда кварковый слабый нейтральный ток в модели с 4-мя кварками будет иметь вид,

$$J_W^{\text{нейтр.}4} = \frac{g}{\sqrt{\cos\theta_W}} [\frac{1}{2} (\bar{c}_L \gamma_\mu c_L + \bar{u}_L \gamma_\mu u_L - \bar{d}_L \gamma_\mu d_L - \bar{s}_L \gamma_\mu s_L) - \sin^2\theta_W J^{em}]. \quad (5.14)$$

вспомним, что заряженный ток входит в лагранжиан как

$$L = \frac{g_W}{\sqrt{2}} (J_\mu W^+_\mu + J^\dagger_\mu W^-_\mu)$$

и во втором порядке теории возмущений по константе связи имеем

$$L^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{g^2_W}{q^2 + M^2_W} \bar{u}_L \gamma_\mu d_{CL} \bar{d}_{CL} \gamma_\mu u_L + \textit{Hermitian Conjugation},$$

что следует сравнить с

$$L^{eff} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}\bar{u}\gamma_\mu(1-\gamma_5)d_C\bar{d}_C\gamma_\mu(1-\gamma_5)u + HC.$$

Пренебрегая квадратом переданного импульса q^2 по сравнению с массой W-бозона, имеем

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g_W^2}{8M_W^2} = \frac{e^2}{8M_W^2 \sin^2\theta_W},$$

откуда

$$M_W^2 = \frac{\sqrt{2}e^2}{8G_F} = \frac{\sqrt{2}4\pi\alpha}{8G_F} \sim 1200\ \text{ГэВ}^2. \qquad (5.15)$$

т.е.

$$M_W > 35\ \text{ГэВ!!!}$$

(Ничего подобного ранее не случалось.) Измерения нейтральных слабых токов приводят к значению угла Вайнберга такому, что $\sin^2\theta_W = 0.2311 \pm 0.0003$. Но тогда предсказание становится совершенно точным: $M_W = 73$ ГэВ. Как известно, W-бозон был открыт со значением массы 80.22 ± 0.26 ГэВ, что согласуется с предсказанным результатом, значение которого на самом деле следует увеличить примерно на 10% из-за сильных радиационных поправок.

5.4 6-кварковая модель и матрица CKM

Но у нас теперь 6 кварков, а не 4. Остается предположить, что смешиваются уже не два (d- и s-), а три аромата (d, s,b).

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}. \qquad (5.16)$$

Именно это и предположили Кобаяши и Маскава в 1973. При этом смешивание не должно привести к появлению слабых нейтральных токов с изменением ароматов. Диагональный характер нейтрального тока достигается ортогональной матрицей V_{CKM} преобразования трех ароматов с зарядом -1/3. Более того, оказывается возможным ввести фазу для описания нарушения CP-четности (тогда как при меньшем числе ароматов фазу можно ввести формально, но она тут же может быть переведена в фазовый множитель перед волновой функцией одного из кварков). В настоящее время матрица Кобаяши-Маскава выбирается в виде

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}. \qquad (5.17)$$

Здесь $c_{ij} = \cos\theta_{ij}$, $s_{ij} = \sin\theta_{ij}$, (i,j = 1,2,3), а θ_{ij} - обобщенные углы Кабиббо. При $\theta_{23} = 0$, $\theta_{13} = 0$ мы возвращаемся к привычному углу Кабиббо $\theta_C = \theta_{12}$. Запишем матрицу V_{CKM} с помощью формул (1, 5, 7) в виде

$$V_{CKM} = R_1(\theta_{23})D^*(e^{i\delta_{13}/2})R_2(\theta_{13})D(e^{i\delta_{13}/2})R_3(\theta_{12}) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_{23} & \sin\theta_{23} \\ 0 & -\sin\theta_{23} & \cos\theta_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\delta_{13}/2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta_{13}/2} \end{pmatrix} x$$

$$x \begin{pmatrix} \cos\theta_{13} & 0 & \sin\theta_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_{13} & 0 & \cos\theta_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\delta_{13}/2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\delta_{13}/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_{12} & \sin\theta_{12} & 0 \\ -\sin\theta_{12} & \cos\theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

Элементы матрицы извлекаются из эксперимента со все большей точностью. Динамику получаемых результатов можно увидеть в приведенных ниже матрицах за два года, разделенных 4-летним интервалом:

$$V_{CKM}(1990) = \begin{pmatrix} 0.9747\text{to}0.9759 & 0.218\text{to}0.224 & 0.001\text{to}0.007 \\ 0.218\text{to}0.224 & 0.9734\text{to}0.9752 & 0.030\text{to}0.058 \\ 0.03\text{to}0.019 & 0.029\text{to}0.058 & 0.9983\text{to}0.9996 \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

$$V_{CKM}(2000) = \begin{pmatrix} 0.9742\text{to}0.9757 & 0.219\text{to}0.226 & 0.002\text{to}0.005 \\ 0.219\text{to}0.225 & 0.9734\text{to}0.9749 & 0.037\text{to}0.043 \\ 0.04\text{to}0.014 & 0.035\text{to}0.043 & 0.9990\text{to}0.9993 \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

Заряженный слабый ток при этом можно записать в виде

$$J_{\overline{W}} = (\bar{u}, \bar{c}, \bar{t})\gamma_\mu(1+\gamma_5)V_{CKM}\begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}. \quad (5.21)$$

Нейтральный ток примет следующий вид в 6-кварковой стандартной модели Салама-Вайнберга:

$$\frac{g}{\sqrt{\cos\theta_W}} J_W^{\text{нейтр.6}} =$$

$$= \frac{g}{\sqrt{\cos\theta_W}}\left[\frac{1}{2}(\bar{t}\gamma_\mu t_L + \bar{c}_L\gamma_\mu c_L + \bar{u}_L\gamma_\mu u_L - \bar{d}_L\gamma_\mu d_L - \bar{s}_L\gamma_\mu s_L - \bar{b}_L\gamma_\mu b_L) - \sin^2\theta_W J^{em}\right]. \quad (5.22)$$

5.5 Бозоны W и Y как калибровочные поля

Бозоны W и Y можно ввести как калибровочные поля, что обеспечивает перенормируемость теории электрослабых взаимодействий. Мы уже познакомились с методом построения лагранжианов, инвариантных относительно локальных калибровочных преобразований, на примере электромагнитного поля и изотриплета полей векторных ρ-мезонов.

Мы уже ввели понятие слабого изоспина, а теперь потребуем локальной калибровочной инвариантности лагранжиана левоспиральных и правоспиральных кварковых (и лептонных) полей относительно преобразований в слабом изотопическом пространстве по группе $SU(2)_L$ x SU(1).

При этом мы, рассматривая отдельно лево- и правоспиральные компоненты кварков (и лептонов), положим их массы раными нулю.

Достаточно написать выражение для одного левоспирального слабого изодублета и соответствующих правоспиральных слабых изосинглетов u_R, d_R:

$$L_0 = \bar{q}_L(x)\partial_\mu\gamma_\mu q_L(x) + \bar{u}_R(x)\partial_\mu u_R(x) + \bar{d}_R(x)\partial_\mu d_R(x). \tag{5.23}$$

Этот лагранжиан инвариантен относительно глобального калибровочного преобразования

$$q'_L(x) = e^{i\vec{\alpha}\vec{\tau}}q_L(x),$$
$$u'_{R,L}(x) = e^{i\beta_{R,L}}u_{R,L}(x),$$
$$d'_{R,L}(x) = e^{i\beta'_{R,L}}d_{R,L}(x),$$

где матрицы $\vec{\tau}$ действуют в слабом изотопическом пространстве, а $\vec{\alpha} = (\alpha 1, \alpha 2, \alpha 3)$, $\beta_{R,L}$, $\beta'_{R,L}$ - произвольные вещественные фазы.

Потребуем теперь инвариантности лагранжиана относительно подобного, но локального калибровочного преобразования, когда $\vec{\alpha}$ и $\beta_{R,L}$, $\beta'_{R,L}$ являются функцией x: Но, как и в предыдущем случае, L_0 неинвариантен относительно подобного локального калибровочного преобразования:

$$L'_0 = L_0 + i\,\bar{q}_L(x)\gamma_\mu\frac{\partial\vec{\tau}\vec{\alpha}(x)}{\partial x_\mu}q_L(x) + i\bar{u}_R\gamma_\mu\frac{\partial\beta_R(x)}{\partial x_\mu}u_R + \bar{d}_R\gamma_\mu\frac{\partial\beta'_R(x)}{\partial x_\mu}d_R +$$
$$+ i\bar{u}_L\gamma_\mu\frac{\partial\beta_L(x)}{\partial x_\mu}u_L + \bar{d}_L\gamma_\mu\frac{\partial\beta'_L(x)}{\partial x_\mu}d_L. \tag{5.24}$$

Для того, чтобы убрать члены, нарушающие калибровочную инвариантность, введем слабый изотриплет векторных полей $\vec{W}_\mu$ и слабый изосинглет Y_μ с калибровочными преобразованиями

$$\vec{\tau}\vec{W}'_\mu = U^\dagger\vec{\tau}\vec{W}_\mu U - \frac{1}{g_W}U^\dagger\frac{\partial U}{\partial x_\mu}, \tag{5.25}$$

где $U = e^{i\vec{\alpha}(x)\vec{\tau}}$;

$$Y'_\mu = Y_\mu - \frac{1}{g_Y}\frac{\partial(\beta_R + \beta'_R + \beta_L + \beta'_L)}{\partial x_\mu}.$$

Взаимодействие этих полей с кварками зададим лагранжианом, который мы уже построили выше

$$L = \bar{u}_L\gamma_\mu d_L W^+_\mu + \bar{d}_L\gamma_\mu u_L W^-_\mu + g\frac{1}{2}(\bar{u}_L\gamma_\mu u_L - \bar{d}_L\gamma_\mu d_L)W_{3\mu} +$$
$$+ g'(a\bar{u}_L\gamma_\mu u_L + b\bar{u}_R\gamma_\mu u_R + c\bar{d}_L\gamma_\mu d_L + q\bar{d}_R\gamma_\mu d_R)Y_\mu. \tag{5.26}$$

Итак, требование инвариантности лагранжиана относительно локальных калибровочных преобразований по группе $SU(2)_L x SU(1)$ приводит к появлению четырех безмассовых векторных полей $\vec{W}$, Y.

Ранее уже было показано, как поля с нулевым электрическим зарядом $W_{3\mu}, Y_\mu$ ортогональным преобразованием переводятся в Z_μ, A_μ. Затем вводится механизм спонтанного нарушения симметрии, который строится таким образом, чтобы поля $W^{\pm}$, Z оказались массивными, а поле A_μ осталось безмассовым. Это производится обычно с помощью так наз. механизма Хиггса. В итоге, повторяя рассуждения для других ароматов, приходим к уже полученным выражениям для заряженных и нейтральных токов, только уже в калибровочно-инвариантной теории со спонтанным нарушением симметрии.

Содержание Продолжение

6.1 Цвет и его появление в физике частиц

Гипотеза цвета явилась началом создания современной теории сильных взаимодействий-квантовой хромодинамики. Мы познакомимся вначале с опытными фактами, которые натолкнули физиков на идею существования глюонов - квантов цветного поля.

1) Проблема статистики для uuu, ddd, sss состояний с $J^P = 3/2^+$

Как известно, фермионы подчиняются статистике Ферми-Дирака, вследствие чего полная волновая функция, описывающая систему с полуцелым спином, должна быть антисимметрична. Но кварки, образующие в кварковой модели резонансы Δ^{++} = (uuu), Δ^- = (ddd), и частицу Ω^- = (sss), должны находиться в симметричном S-состоянии, что запрещено принципом Паули. Можно отказаться от статистики Ферми для кварков, ввести "парастатистику", и т.д. Но можно попытаться остаться при прежних фундаментальных воззрениях и принципах и формально спасти положение, придумав новое по отношению к пространству-времени и изотопическому (или унитарному) пространству так наземое цветное пространство. Поскольку qqq надо антисимметризовать, а простейший тензор под руками - абсолютно антисимметричный тензор 3-го ранга ε_{abc}, который, как мы уже знаем, преобразуется по единичному представлению группы SU(3), то свертка $\varepsilon_{abc}q^aq^bq^c$ будет скаляром SU(3) по вновь введенному квантовому числу "цвет" (здесь a, b, c = 1,2,3 - цветные индексы, не имеющие никакого отношения к унитарным индексам в предыдущих формулах для барионов). Таким образом, и статистика спасена, и не появилось никому (почти никому) не нужного нового отличного от нуля квантового числа "цвет" (типа новой странности и нового изоспина) для обычных барионов, которого вовсе не требуют экспериментальные данные. Зато кварки стали цветные, их число утроилось. Ну и бог с ними, все равно они не наблюдаемы.

2) Проблема с временем жизни π^0-мезона

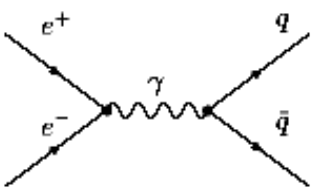
Мы уже отмечали, что простая модель распада π^0-мезона, основанная на фейнмановской диаграмме с нуклонной петлей, дает, как ни странно, хорошее согласие с экспериментом. При этом в вероятность распада масса нуклонов петли входит в знаменатель в квадрате. По этой причине переход к модели конституентных кварков (переход от m_N = 0.940 ГэВ к m_u = 0.300 ГэВ) уменьшает ее примерно в 10 раз. Другими словами, результат кварковой модели резко расходится с опытными данными. Как спасти ситуацию? Утроить число кварковых диаграмм посредством введения цвета!!! Действительно, поскольку $3^2 = 9$, то ситуация спасена.

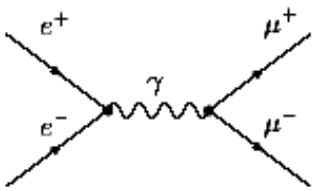
3) Проблема с сечением рождения адронов в e^+e^--аннигиляции

Рассмотрим отношение сечения рождения адронов в e^+e^- аннигиляции к хорошо известному сечению рождения мюонов в e^+e^--аннигиляции:

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \to \text{адроны})}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)}. \qquad (6.1)$$

Как можно видеть из диаграмм Фейнмана в низшем порядке теории возмущений по константе α,





соответствующие процессы в пренебрежении процессом "адронизации" кварков описываются одинаковыми диаграммами. Различие заключается в разных зарядах электронов (позитронов) и кварков. В простой кварковой модели с точечными кварками отношение R дается просто суммой квадратов зарядов кварков, т.е., для интервала энергий электрон-позитронных колец вплоть до 2-3 ГэВ $R = (2/3)^2 + (-1/3)^2 + (-1/3)^2 = 2/3$. Однако, эксперимент дает в этом интервале энергий цифру примерно возле 2.0. Как понятно, многое можно списать на плохо понятный процесс "адронизации" кварков (все-таки измеряются в конце адроны, а не кварки!). Но опять-таки простейшим решением является утроение числа кварков, тогда как раз и получится нужная цифра: 3 x 2/3 = 2.

Итак, введение трех цветов может одновременно снять несколько важных и даже принципиальных противоречий в физике частиц.

Но динамическая теория возникает только тогда, когда появляется квант поля (глюон), передающий цвет от одного кварка к другому, и этот квант так или иначе воздействует на измерительные приборы.(Иначе все останется на уровне более или менее удачной классификации, как, например, случилось с изотопическим спином и гиперзарядом. На сегодняшний день им нельзя сопоставить квантов поля.)

Полагают, что динамические теории тесным образом связаны с локальной градиентной инвариантностью лагранжиана, описывающего поля и их взаимодействия, относительно вполне определенных групп преобразований.

6.2 Глюон как калибровочное поле

Подобно рассмотренным случаям с фотоном и ρ-мезоном, напишем лагранжиан для свободных полей трехцветных кварков q^a, где кварк q^a, a = 1,2,3 есть 3-спинор группы $SU(3)_C$ в цветном пространстве:

$$L_0 = \bar{q}_a(x)\partial_\mu\gamma_\mu q^a(x) + m_q\bar{q}_a(x)q^a(x). \qquad (6.2)$$

Этот лагранжиан инвариантен относительно глобального калибровочного преобразования

$$q'^a(x) = e^{i(\alpha^k\lambda^k)^a_b}q^b(x),$$

где λ^k, k = 1,...8 - знакомые матрицы Гелл-Манна, но в цветном пространстве. Потребуем теперь инвариантности лагранжиана относительно подобного, но локального калибровочного преобразования, когда α^k является функцией x:

$$q'^a(x) = e^{i(\alpha^k(x)\lambda^k)^a_b}q^b(x),$$

или

$$q'(x) = U(x)q(x),\ \ U(x) = e^{i(\alpha^k(x)\lambda^k)}.$$

Но, как и в предыдущих двух случаях, L_0 неинвариантен относительно подобного локального калибровочного преобразования:

$$L'_0 = \bar{q}_a(x)\partial_\mu\gamma_\mu q^a(x) + \bar{q}_a(x)(U^\dagger(x)\gamma_\mu\partial_\mu U(x))^a_b\, q^b(x) + m_q\bar{q}_a(x)q^a(x). \qquad (6.3)$$

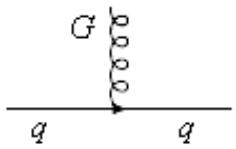
Для того, чтобы убрать член, нарушающий калибровочную инвариантность, введем безмассовое векторное поле G^k_μ, k = 1,...8, с калибровочным преобразованием

$$\lambda^k G'^k_\mu = U\lambda^k G^k_\mu U^\dagger - (1/g)\frac{\partial U}{\partial x_\mu}U^\dagger.$$

Взаимодействие этого поля с кварками зададим лагранжианом

$$L = g\bar{q}_a(x)(G^k_\mu \lambda_k)^a_b \gamma_\mu q^b(x),$$

которому поставим в соответствие фейнмановские диаграммы вида



Запишем окончательное выражение для лагранжиана, инвариантного относительно локальных калибровочных преобразований неабелевой группы $SU(3)_C$ в пространстве цвета:

$$L_{SU(3)_C} = \bar{q}_a(x)\partial_\mu\gamma_\mu q^a(x) + m_q\bar{q}_a(x)q^a(x) + g\bar{q}_a(x)(G^k_\mu\lambda_k)^a_b\gamma_\mu q^b(x) - \frac{1}{4}F^{k\mu\nu}F^k_{\mu\nu}, \quad (6.4)$$

где $F^{k\mu\nu'}$, k=1,2,...8, - тензор свободного глюонного поля, преобразующийся при локальных калибровочных преобразованиях как

$$\lambda^k F^{k\mu\nu'} = U^\dagger(x)\lambda^l(x)F^{l\mu\nu}U(x). \quad (6.5)$$

Оно ковариантно относительно калибровочных преобразований $U^\dagger\vec{F}'_{\mu\nu}U = \vec{F}_{\mu\nu}$. Подробнее выпишем тензор свободного глюонного поля $\vec{\lambda}\vec{F}_{\mu\nu} = \lambda F^k_{\mu\nu} \equiv \tilde{F}_{\mu\nu}$, $[\lambda_i,\lambda_j] = 2i\varepsilon^{ijk}\lambda_k$, i,j,k = 1,2,...8):

$$\vec{F}_{\mu\nu} = (\partial_\nu G^k_\mu - \partial_\mu G^k_\nu) - 2g_s i f^{kij} G^i_\mu G^j_\nu$$

или

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = (\partial_\nu \tilde{G}_\mu - \partial_\mu \tilde{G}_\nu) - g_s[\tilde{G}_\mu, \tilde{G}_\nu]$$

и убедимся, что это выражение ковариантным образом преобразуется при калибровочном преобразовании над полем G:

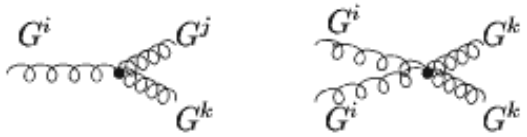
$$U^\dagger(\partial_\nu \tilde{G}'_\mu - \partial_\mu \tilde{G}'_\nu)U = (\partial_\nu \tilde{G}_\mu - \partial_\mu \tilde{G}_\nu) + [U^\dagger\partial_\nu U, \tilde{G}_\mu] - [U^\dagger\partial_\mu U, \tilde{G}_\nu],$$
$$U^\dagger[\tilde{G}'_\mu, \tilde{G}'_\nu]U = [\tilde{G}_\mu, \tilde{G}_\nu] + \frac{1}{g_s}[U^\dagger\partial_\nu U, \tilde{G}_\mu] - \frac{1}{g_s}[U^\dagger\partial_\mu U, \tilde{G}_\nu]. \quad (6.6)$$

Окончательно

$$U^{\dagger}\vec{F}'_{\mu\nu}U = U^{\dagger}(\partial_\nu \tilde{G}'_\mu - \partial_\mu \tilde{G}'_\nu - g_s[\tilde{G}'_\mu, \tilde{G}'_\nu])U = \\ = \partial_\nu \tilde{G}_\mu - \partial_\mu \tilde{G}_\nu + g_s[\tilde{G}_\mu, \tilde{G}_\nu] = \vec{F}_{\mu\nu}. \quad (6.7)$$

Особенностью неабелевого векторного поля, как мы это уже видели на примере ρ-мезонного поля, является тот факт, что оно оказывается самодействующим, т.е., в лагранжиане в члене $(-1/4)|\vec{F}'_{\mu\nu}|^2$ присутствуют члены не только билинейные по полю G, как это происходит в случае (абелева) электромагнитного поля, но и члены 3- и 4- линейные по глюонному полю $G_\nu G_\mu \partial_\nu G_\mu$ и $G_\nu^2 G_\mu^2$, которым отвечают диаграммы.

Соответствующие фейнмановские диаграммы имеют вид:



Это обстоятельство оказывается решающим при построении неабелевой теории сильных взаимодействий- квантовой хромодинамики.

Эти выражения в сущности составляют основу квантовой хромодинамики. Мы не будем здесь обсуждать вопросы, связанные с КХД, ограничившись несколькими примерами применения понятия цвета к наблюдаемым процессам.

6.3 Простые примеры проверки гипотезы о цветных кварках

Введя цвет, мы получили возможность предсказывать отношения многих каналов распада, и тем самым убедиться в справедливости гипотезы о существовании цвета.

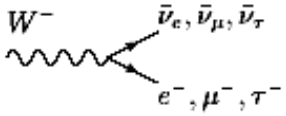
Для примера рассмотрим каналы распада открытого почти сразу после J/Ψ-частицы τ-лептона с массой примерно 1800 МэВ (эксп. (1777.1 +0.4-0,5)МэВ). Принимая в качестве рабочей гипотезы кварковую модель и считая кварки точечными (поскольку фундаментальными на уровне лептонов), получаем, что τ-лептон распадается с излучением тау-нейтрино либо на лептоны (два канала, с излучением пары электрон-электронное антинейтрино и пары мюон-мюонное антинейтрино), либо на кварки (с-кварк слишком массивен, вклад s-кварка подавлен углом Кабиббо, остается пара ud-кварков).

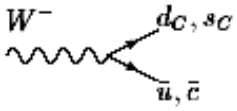
Отсюда сразу следует, что в отсутствие цвета имеем два лептонных канала и один кварковый, и парциальная ширина распада по адронному каналу B_h должна составить 1/3 от полной ширины, а при наличии цвета имеем два лептонных канала и три кварковых, и тогда $B_h \sim 3/5$. Или, что то же, определенный лептонный канал распада составит примерно 33 процента в отсутствие цвета и 20 процентов при его наличии. Эксперимент дает

$$\tau^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau \ (17.37 \pm 0.09)\% \text{ и}$$
$$\tau^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\tau \ (17.81 \pm 0.07)\%,$$

подтверждая гипотезу трех цветов.

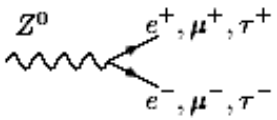
W-бозон распадается уже по трем лептонным каналам и двум кварковым,

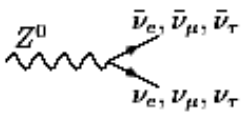


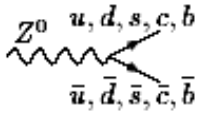


это означает, что в отсутствие цвета доля его адронного канала распада B_h составила бы 40%, а при наличие цвета - 66%. Эксперимент дает B_h ~ (67.8±1.5)%, еще раз подтверждая гипотезу о трехцветных кварках.

Z-бозон распадается уже по 6 лептонным каналам и 5 кварковым,







Это означает, что в отсутствие цвета адронные каналы распада должны составить примерно 45%, а при наличии трех цветов - примерно 71% . Эксперимент дает (69.90 ± 0.15)%. Эти примеры показывают, что цветные степени свободы существуют.

Содержание

Valery Zamiralov

Introduction to group theory and its representations and some applications to particle physics

I. Introduction

- Introduction
- Groups and algebras. Basic notions
- Representations of the Lie groups and algebras
- Unitary unimodular group SU(2)
- SU(2) as a spinor group
- Isospin group SU(2)
- Unitary symmetry group SU(3)

II. Unitary symmetry and quarks

- Eightfold way. Mass formulae in SU(3)
  - Baryon and meson unitary multiplets
  - Mass formulae for octet of pseudoscalar mesons
  - Mass formulae for octet of baryons $J^P = 1/2^+$
  - Nonet of the vector meson and mass formulae
  - Decuplet of baryon resonances with $J^P = 3/2^+$ and its mass formulae
- Praparticles and hypothesis of quarks
- Quark model. Mesons in quark model
- Charm and its arrival in particle physics
- The fifth quark. Beauty
- Truth or top?
- Baryons in quark model

III. Currents in unitary symmetry and quark models

- Electromagnetic current in the models of unitary symmetry and of quarks
  - On magnetic moments of barions
  - Radiative decays of vector mesons
  - Leptonic decays of vector mesons $V \to l^+l^-$
- Photon as a gauge field

- **Rho-meson as a gauge field**
- **Vector and axial-vector currents in unitary symmetry and quark model**
  - General remarks on weak interaction
  - Weak currents in unitary symmetry model
  - Weak currents in a quark model

IV. Introduction to Salam-Weinberg-Glashow model

- **Neutral weak currents**
  - GIM model
  - Construction of the Salam-Weinberg model
  - Six quark model and CKM matrix
- **Vector bosons W and Y as gauge fields**
- **About Higgs mechanism**

V. Colour and gluons

- **Colour and its appearence in particle physics**
  - Gluon as a gauge field
  - Simple examples with coloured quarks

VI. Conclusion

27.02.09

mail.ru 0 1124277 0
УЧАСТНИК TOP 100 Rambler's